

精华考点 6 页纸

高等数学（一）

专科起点升本科

第一章 极限和连续

考点 1 常用等价无穷小代换

当 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sim \sin x \sim \ln(1+x) \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \tan x$,

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (\alpha \text{ 为实常数, } \alpha \neq 0).$$

考点 2 函数极限存在的充要条件

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

函数在一点处极限存在的充要条件是左右极限都存在且相等. 如果左右极限有一个不存在, 或者左右极限都存在但不相等, 则函数在这点处的极限不存在.

考点 3 函数极限四则运算法则

设有函数 $f(x), g(x)$, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_n}, & m = n, \\ \infty, & m > n, \\ 0, & m < n. \end{cases}$$

考点 4 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

考点 5 函数在一点连续的充要条件

函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

第二章 一元函数微分学

考点 1 函数在一点可导的充要条件

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右导数都存在且相等, 即

$$f'(x_0) = A \Leftrightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = A.$$

考点2 导数的几何意义

若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 存在, 则表明曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处

存在切线, 且切线的斜率为 $f'(x_0)$, 切线方程为 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, 法线方程

$$\text{为 } y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) (f'(x_0) \neq 0).$$

考点3 洛必达法则 (“ $\frac{0}{0}$ ”型或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式)

如果函数 $f(x), g(x)$ 满足条件:

(1) 在点 x_0 的某一去心邻域 (或 $|x| > N$) 内可导, 且 $g'(x) \neq 0$.

(2) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = 0, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = 0$ 或 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = \infty, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = \infty$.

(3) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大), 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

考点4 函数取得极值的充分条件

1. 第一种充分条件

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内可导, 且 $f'(x_0) = 0$ (或在点 x_0 处 $f'(x)$ 不存在).

若在此邻域内:

(1) 当 $x < x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 而当 $x > x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$.

(2) 当 $x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 而当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值 $f(x_0)$.

若当 $x < x_0$ 与 $x > x_0$ 时, $f'(x)$ 不改变符号, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处不取得极值.

2. 第二种充分条件

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$. 若

(1) $f''(x_0) < 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$.

(2) $f''(x_0) > 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值 $f(x_0)$.

(3) $f''(x_0)=0$ ，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可能取得极值，也可能不取得极值，这时需要用第一种充分条件判定.

考点 5 最大值与最小值的求法

求最大值与最小值的一般方法是：

(1) 求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内的所有驻点、导数不存在的点.

(2) 求出上述各点及区间两个端点 $x=a, x=b$ 处的函数值.

(3) 进行比较，其中最大的数值即为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，而其中最小的数值即为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值.

考点 6 曲线凹凸性及拐点的判定

设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导.

(1) 若在 (a,b) 内有 $f''(x)>0$ ，则曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内为凹的.

(2) 若在 (a,b) 内有 $f''(x)<0$ ，则曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内为凸的.

求出使二阶导数等于零的点，以及二阶导数不存在的点，如果 $f''(x)$ 在 x_0 的两侧异号，则 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线弧 $y=f(x)$ 的拐点.

第三章 一元函数积分学

考点 1 第一换元积分法（凑微分法）

设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$ ， $u=\varphi(x)$ 可导，则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = \int f(u)du = F(u) + C = F[\varphi(x)] + C.$$

考点 2 第二换元积分法

设 $x=\varphi(t)$ 是单调可导函数，又已知 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 具有原函数 $\Phi(t)$ ，则 $\Phi[\varphi^{-1}(x)]$ 是 $f(x)$ 的原函数. 即 $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \Phi(t) + C = \Phi[\varphi^{-1}(x)] + C$. 其中 $\varphi^{-1}(x)$ 是 $x=\varphi(t)$ 的反函数.

考点 3 分部积分法

设函数 $u=u(x)$ ， $v=v(x)$ 具有连续的导函数，则有 $\int u dv = uv - \int v du$.

利用分部积分法的关键在于选择适当的 u 和 dv . 一般来说，需要考虑：先要考虑 dv ，要便于求出原函数 v ；再考虑利用分部积分公式后， $\int v du$ 比 $\int u dv$ 便于计算.

考点 4 函数可积的条件

(1) $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的必要条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

(2) $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充分条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

考点 5 变上限积分的求导

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则变上限积分 $R(x)=\int_a^x f(t)dt$ 是被积函数 $f(x)$ 的一个原函数, 即 $R'(x)=f(x)$ 或 $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$.

考点 6 牛顿-莱布尼茨公式

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

第四章 空间解析几何

考点 1 平面的点法式方程

过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 以 $n=\{A, B, C\}$ 为法向量的平面方程为

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, 称之为平面的点法式方程.

考点 2 直线的标准式方程

过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且平行于向量 $S=\{m, n, p\}$ 的直线方程为 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, 称

之为直线的标准式方程, 这里 S 称之为直线的方向向量.

考点 3 球面方程和椭圆锥面方程

方程 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 表示球心在 (a, b, c) , 半径为 R 的球面方程. 方程

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (其中 $a>0, b>0, c>0$) 表示中心在原点的椭球面, 称之为椭球面方

程. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 表示顶点在原点, z 轴为对称轴的椭圆锥面.

第五章 多元函数微积分学

考点 1 全微分

若 $z=f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微, $A=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, B=\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$, 则有

$$dz\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} dx + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} dy.$$

考点 2 复合函数的偏导数

设函数 $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ 在点 (x, y) 处有连续偏导数. 函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 处有连续偏导数. 则复合函数 $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ 在点 (x, y) 处对 x, y 有连续偏导数, 且 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$.

考点 3 一元隐函数的偏导数

设方程 $F(x, y) = 0$ 确定 y 是 x 的函数, 且 $F(x, y)$ 在点 (x, y) 的某个邻域内具有连续偏导数, 则 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} (F_y(x, y) \neq 0)$.

考点 4 直角坐标系下二重积分的计算

(1) 若 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \text{ 或 } \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

(2) 若 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

(3) 若 $D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

第六章 无穷级数

考点 1 收敛半径的求法

对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, 则有: 若 $\rho \neq 0$, 则 $R = \frac{1}{\rho}$; 若 $\rho = 0$, 则 $R = +\infty$

(在整个数轴上都收敛); 若 $\rho = +\infty$, 则 $R = 0$ (仅在 $x = 0$ 点收敛).

考点 2 几种常用函数的幂级数展开式

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n (-1 < x < 1); \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n (-1 < x < 1); \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (-\infty < x < +\infty);$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (-\infty < x < +\infty); \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} (-\infty < x < +\infty);$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \leq 1); \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (-1 \leq x < 1).$$

第七章 常微分方程

考点 1 可分离变量的微分方程求解步骤

形如 $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ 的微分方程称为可分离变量的微分方程. 求解步骤:

(1) 分离变量: 把可分离变量的微分方程变形, 变成一端只含 y 的函数和 dy , 另一端只含 x 的函数和 dx .

(2) 两端积分: 对变形后的微分方程两端分别进行积分, 即可求得原微分方程的通解.

考点 2 一阶线性非齐次微分方程

形如 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的微分方程称为一阶线性非齐次微分方程.

则其通解公式为 $y = \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right] e^{-\int P(x)dx}$.

考点 3 二阶常系数线性齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ 通解的求法

先写出与其对应的特征方程 $r^2 + pr + q = 0$.

(1) 若特征方程有两个不等实根 r_1, r_2 , 则齐次方程的通解为 $\bar{y} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.

(2) 若特征方程有一重根 r , 则齐次方程的通解为 $\bar{y} = (C_1 x + C_2) e^{rx}$.

(3) 若特征方程无实根, 或者说有一对共轭复根 $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$, 则齐次方程的通解为 $\bar{y} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

考点 4 二阶常系数线性非齐次方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 通解的求法

(1) 先求出与其对应的齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解 $\bar{y}$.

(2) 再求出非齐次方程的特解 y^* , 则该方程的通解为 $y = \bar{y} + y^*$.

特解 y^* 的求法: 若 $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, 则方程的特解可设为 $y^* = x^k Q_n(x)e^{\alpha x}$. 其中 $Q_n(x)$

与 $P_n(x)$ 是同次多项式, 系数待定, 且

$$k = \begin{cases} 0, & \alpha \text{ 不是特征根,} \\ 1, & \alpha \text{ 为单特征根,} \\ 2, & \alpha \text{ 为二重特征根.} \end{cases}$$