

专升本高等数学一知识点汇总

函数

一、常见函数的定义域总结

1. $y = kx + b$

$y = ax^2 + bx + c$ 一般形式的定义域: $x \in R$

2. $y = \frac{k}{x}$ 分式形式的定义域: $x \neq 0$

3. $y = \sqrt{x}$ 根式的形式定义域: $x \geq 0$

4. $y = \log_a x$ 对数形式的定义域: $x > 0$

二、函数的性质

1. 单调性

设 $y = f(x)$ 在某区间内有定义, 如果该区间内任意两点 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则 $y = f(x)$ 在该区间内单调增加。如果该区间内任意两点 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则 $y = f(x)$ 在该区间内单调减少。

2. 奇偶性

设 $y = f(x)$ 的定义区间 D 关于原点对称 (即若 $x \in D$, 则有 $-x \in D$)。

如果对于 D 内任意的点 x , 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为 D 内的偶函数; 如果恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为 D 内的奇函数。

三、基本初等函数

(1) 幂函数 $y = x^\mu$ (μ 为实数)

(2) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

(3) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

(4) 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$

(5) 反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$

上述五类函数的定义域、单调性及图形需熟记。

极限

一、极限的四则运算

1.若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)]$ 必定存在, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B。$$

2.若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = AB$$

推论 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, n 为正整数, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]^n = A^n$$

3.若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 且 $B \neq 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$$

二、两个重要极限

重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e, \lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}} = e, \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e。$

两个重要极限的结构形式特点:

$$\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1;$$

$$\lim_{\square \rightarrow \infty} (1 + \square)^{\frac{1}{\square}} = e, \lim_{\square \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{\square})^{\square} = e$$

三、等价无穷小量

当 $A = 1$ 时, 称在 $x \rightarrow x_0$ 时, α 与 β 为等价无穷小量, 常记为 $\alpha \sim \beta$ 。

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x, \tan x \sim x, \ln(1+x) \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, e^x - 1 \sim x。$

导数

一、导数的概念

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的一邻域内有定义，若自变量 x 在点 x_0 处的改变量为

Δx ($x_0 + \Delta x$ 仍在该领域内)，函数 $y = f(x)$ 相应的有改变量

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 。如果极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则

称此极限值为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记作 $y'|_{x=x_0}$, $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ 或 $f'(x_0)$ ，即

$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 。此时函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导。

二、导数的运算

1. 基本初等函数的求导公式

(1) $(C)' = 0$ (C 为常数)

(2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α 为实数)

(3) $(a^x)' = a^x \ln a$

(4) $(e^x)' = e^x$

(5) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

(6) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

(7) $(\sin x)' = \cos x$

(8) $(\cos x)' = -\sin x$

(9) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

(10) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

(11) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(12) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$(13) (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(14) (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

2. 导数的四则运算公式

$$(1) (cu)' = cu' \quad (c \text{ 为常数})$$

$$(2) [u \pm v]' = u' \pm v'$$

$$(3) (uv)' = u'v + uv'$$

$$(4) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

3. 复合函数求导法则

设 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 复合成 $y = f[g(x)]$, 若 $u = g(x)$ 在点 x 处可导, $y = f(u)$

相应点 $u = g(x)$ 处可导, 则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 x 处可导, 且有链式法则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x).$$

微分

可微与可导的关系

函数 $y = f(x)$ 在点 x 处可微的充分必要条件是 $y = f(x)$ 在点 x 处可导, 且有

$$dy = f'(x) \Delta x \quad (= y' \Delta x).$$

$$\Delta x = dx, \text{ 因此有 } dy = y' dx, \quad dy \Big|_{x=x_0} = y' \Big|_{x=x_0} dx$$

洛必达法则

未定型 “ $\frac{0}{0}$ ” 和未定型 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 不定式, 存在有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)} \quad (\text{或为 } \infty)$$

导数的应用

一、函数的单调性与极值

1. 函数的单调性

设 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内有定义, 且 $y = f(x)$ 可导。

(1) 若对于任意的 $x \in (a, b)$, 有 $f'(x) > 0$, 则 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内为单调增加函数。

(2) 若对于任意的 $x \in (a, b)$, 有 $f'(x) < 0$, 则 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内为单调减少函数。

2. 函数的极值

设 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义。

如果对于该邻域内任何异于 x_0 的点 x , 恒有 $f(x) < f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个极大值点, 称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值。

二、函数的最大值与最小值

设函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义, $x_0 \in [a, b]$, 若对于任意 $x \in [a, b]$, 恒有 $f(x) \leq f(x_0)$ (或 $f(x) \geq f(x_0)$), 则称 $f(x_0)$ 为函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最大值 (或最小值), 称点 x_0 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值点 (或最小值点)。

三、曲线的凹凸性

1. 曲线的凹凸性

设函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导。

若在 (a, b) 内有 $f''(x) > 0$, 则曲线弧 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内为凹的。

若在 (a, b) 内有 $f''(x) < 0$, 则曲线弧 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内为凸的。

2. 曲线的拐点

设函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内有二阶导数 $f''(x)$, $x_0 \in (a, b)$ 。

若 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧异号, 那么点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 此时 $f''(x) = 0$ 。

若 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧同号, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点。

不定积分

一、不定积分的概念与性质

1.不定积分

$f(x)$ 的原函数的全体, 成为 $f(x)$ 的不定积分, 记为 $\int f(x) dx$ 。

如果 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则有 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 其中 C 为任意常数。

2.不定积分的性质

设 $f(x)$, $g(x)$ 都存在不定积分, 则有:

$$(1) \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$(2) \int kf(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \text{ 为常数})$$

$$(3) [\int f(x) dx]' = f(x) \quad (\text{简述为: 先积分后求导, 作用抵消}),$$

$$d \int f(x) = f(x) dx$$

$$(4) \int f'(x) dx = f(x) + C \quad (\text{简述为: 先求导后积分, 相差一个常数})$$

二、不定积分的基本公式 (需要熟练记忆)

以下公式中 C 为任意常数

$$(1) \int 0 \cdot dx = C$$

$$(2) \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$(3) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$(4) \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

$$(5) \int e^x dx = e^x + C$$

$$(6) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(7) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(8) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$(9) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$(10) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$(11) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

不定积分运算是求导数运算的逆运算。

三、第一换元积分法

设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$ ， $u = \varphi(x)$ 存在连续导函数，则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = \int f(u) du = F(u) \Big|_{u=\varphi(x)} + C = F[\varphi(x)] + C。$$

常见的凑微分形式有：

$$(1) \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b) d(ax+b) \quad (a \neq 0)$$

$$(2) \int x^n f(x^{n+1}) dx = \frac{1}{n+1} \int f(x^{n+1}) d(x^{n+1}) \quad (n \neq -1)$$

$$(3) \int f(\sin x) \cos x dx = \int f(\sin x) d(\sin x)$$

$$(4) \int f(\cos x) \sin x dx = - \int f(\cos x) d(\cos x)$$

$$(5) \int e^x f(e^x) dx = \int f(e^x) d(e^x)$$

$$(6) \int a^x f(a^x) dx = \frac{1}{\ln a} \int f(a^x) d(a^x)$$

$$(7) \int \frac{1}{x} f(\ln x) dx = \int f(\ln x) d(\ln x)$$

$$(8) \int \frac{1}{x} f(\log_a x) dx = \ln a \int f(\log_a x) d(\log_a x)$$

$$(9) \int f(\tan x) \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int f(\tan x) d(\tan x)$$

$$(10) \int f(\cot x) \frac{1}{\sin^2 x} dx = - \int f(\cot x) d(\cot x)$$

$$(11) \int f(\arcsin x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int f(\arcsin x) d(\arcsin x)$$

$$(12) \int f(\arctan x) \frac{1}{1+x^2} dx = \int f(\arctan x) d(\arctan x)$$

四、分部积分法

$$\text{公式: } \int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

定积分

牛顿-莱布尼茨公式

设：(1) $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续；

(2) $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)。$$

定积分的应用

一、求平面图形的面积

设 $f(x)$, $f_i(x)$, $\varphi(x)$, $\varphi_i(x)$, $i=1,2$ 为连续函数。

1.由 $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ ($a<b$) 及 x 轴所围成的封闭平面图形的面积 S :

$$S = \int_a^b |f(x)| dx。$$

2.由 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $x=a$ 与 $x=b$ ($a<b$) 所围成的封闭平面图形的面积 S :

$$S = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)| dx。$$

3.由 $x=\varphi(y)$, $y=c$, $y=d$ ($c<d$) 及 y 轴所围成的封闭平面图形的面积 S :

$$S = \int_c^d |\varphi(y)| dy。$$

4.由 $x=\varphi_1(y)$, $x=\varphi_2(y)$, $y=c$, $y=d$ ($c<d$) 所围成的封闭平面图形的面积 S :

$$S = \int_c^d |\varphi_2(y) - \varphi_1(y)| dy。$$

5.由 $y=f_1(x)$ 与 $y=f_2(x)$ 所围成的封闭平面图形的面积 S :

先求两条曲线的交点，只需求解方程组：

$$\begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_2(x) \end{cases}$$

得出交点中 x 的最小值记为 a , 最大值记为 b , 则

$$S = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)| dx。$$

二、求旋转体体积

1.曲线段 $y=f(x)$, $a \leq x \leq b$ 绕 x 轴旋转所得旋转体体积 V_x :

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx。$$

2.曲边梯形 $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ ($a<b$) 及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转所得旋转

体体积 V_x :

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx。$$

3. 曲线段 $x = \varphi(y)$, $c \leq x \leq d$ ($c < d$) 绕 y 轴旋转所得旋转体体积 V_y :

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) \, dy。$$

4. 曲边梯形 $x = \varphi(y)$, $y = c$, $y = d$ ($c < d$) 及 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所得旋转体体积 V_y :

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) \, dy。$$

5. 由 $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$ 与 $x = b$ ($a < b$) 所围成的封闭平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体体积 V_x :

$$V_x = \pi \int_a^b |f_2^2(x) - f_1^2(x)| \, dx。$$

6. 由 $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$, $y = c$, $y = d$ ($c < d$) 所围成的封闭平面图形绕 y 轴旋转所得旋转体体积 V_y :

$$V_y = \pi \int_c^d |\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y)| \, dy。$$

平面与直线

一、平面

1. 平面方程

(1) 平面的点法式方程:

在空间直角坐标系中, 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 以 $n = (A, B, C)$ 为法向量的平面方程为

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ 。这个方程称为平面的点法式方程。

(2) 平面的一般式方程:

$Ax + By + Cz + D = 0$ 。这个方程成为平面的一般方程。

2. 特殊的平面方程

$Ax + By + Cz = 0$ 表示过原点的平面方程

$Ax + By + D = 0$ 表示平行于 z 轴的平面方程

$Ax + By = 0$ 表示过 z 轴的平面方程

$Cz + D = 0$ 表示平行于坐标轴平面 xOy 的平面方程

3. 两个平面间的关系

设有平面

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

平面 π_1 与 π_2 相互垂直的充分必要条件是 $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ 。

平面 π_1 与 π_2 平行（不重合）的充分必要条件是 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ 。

平面 π_1 与 π_2 重合的充分必要条件是 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ 。

二、直线

1. 直线的方程

(1) 直线的标准式方程：

过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且平行于向量 $s = (m, n, p)$ 的直线方程为

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}。这个方程称为直线的标准式方程（又成点向式方程、对称式方$$

程）。常称 $s = (m, n, p)$ 为所给直线的方向向量。

(2) 直线的一般式方程：

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad \text{这个方程称为直线的一般式方程。}$$

2. 两直线间的位置关系

设直线 l_1, l_2 的方程分别为：

$$l_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

$$l_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

直线 l_1 与 l_2 平行的充分必要条件为 $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ 。

直线 l_1 与 l_2 相互垂直的充分必要条件为 $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$ 。

3. 直线 l 与平面 π 的位置关系

设直线 l 与平面 π 的方程分别为

$$l: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},$$

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0.$$

(1) 直线 l 与平面 π 垂直的充分必要条件为 $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ 。

(2) 直线 l 与平面 π 平行（不在平面上）的充分必要条件为 $\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 \neq 0 \end{cases}$ 。

(3) 直线 l 落在平面 π 上的充分必要条件为 $\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0 \end{cases}$

偏导数与全微分

一、偏导数的定义

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得改变量

Δx , ($\Delta x \neq 0$), 而 $y = y_0$ 保持不变时, 得到一个改变量

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

如果当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 存在, 则称此极限值为函数

$f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数, 记作

$$f'_x(x_0, y_0), \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \text{ 或 } z'_y \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}.$$

二、全微分的定义

对于自变量在点 (x, y) 处的改变量 $\Delta x, \Delta y$, 如果函数 $z = f(x, y)$ 的全改变量

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \text{ 可以表示为 } \Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho).$$

其中 A, B 与 $\Delta x, \Delta y$ 无关, 可能是 x, y 的函数, $o(\rho)$ 是比 ρ 较高阶的无穷小量

($\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$), 则称 $A\Delta x + B\Delta y$ 是函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的全微

分, 记作 $dz = df(x, y) = A\Delta x + B\Delta y$, 并称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微。

二元函数的极值

极值的充分条件

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某一邻域内有连续的一阶与二阶偏导数, 且点

$P_0(x_0, y_0)$ 为函数 $f(x, y)$ 的驻点, 即 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$,

如果记 $A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, 则:

(1) 当 $B^2 - AC < 0$ 时, 且 $A < 0$ (或 $C < 0$) 时, $P_0(x_0, y_0)$ 为 $f(x, y)$ 的极大值点,

$f(x_0, y_0)$ 为 $f(x, y)$ 的极大值;

当 $B^2 - AC < 0$ 时, 且 $A > 0$ (或 $C > 0$) 时, $P_0(x_0, y_0)$ 为 $f(x, y)$ 的极小值点,

$f(x_0, y_0)$ 为 $f(x, y)$ 的极小值。

(2) 当 $B^2 - AC > 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值。

(3) 当 $B^2 - AC = 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 可能是极值, 也可能不是极值。

将初等函数展开为幂级数

一、定理

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某一邻域内有任意阶导数 $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta) (x - x_0)^{n+1} = 0,$$

其中 ζ 在 x 与 x_0 之间, 则有 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n$, 称为将 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处展开为泰

勒级数, 或称为将 $f(x)$ 展开为 $x - x_0$ 的幂级数。

二、几个常用的标准展开式

$$(1) \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad (-1 < x < 1)$$

$$(2) \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad (-1 < x < 1)$$

$$(3) \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$(4) \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$(5) \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$(6) \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$(7) \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad (-1 \leq x < 1)$$

一阶微分方程

一、可分离变量的微分方程

常称形式如 $M_1(x) N_1(x) dx + M_2(x) N_2(x) dy = 0$ 的方程为可分离变量的微分方程。

二、一阶线性微分方程

1. 形式如 $y' + p(x)y = q(x)$ 的方程，称为一阶线性微分方程。

2. 求解一阶线性微分方程的常见方法是：

(1) 常数变易法，其一般步骤为：

① 先求相应的齐次微分方程 $y' + p(x)y = 0$ 的通解。由可分离变量的微分方程求解方法可

得其通解为 $y = Ce^{-\int p(x) dx}$ 。

② 令 $y' + p(x)y = q(x)$ 的解为 $y = C(x)e^{-\int p(x) dx}$ ，代入原方程可求得

$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x) dx} dx + C$ ，从而所给一阶线性微分方程的通解为

$$y = e^{-\int p(x) dx} [\int q(x)e^{\int p(x) dx} dx + C]。 \quad (*)$$

(2) 直接利用求解公式 (*)

直接利用求解公式 (*) 时，必须先将所给微分方程化为标准方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 。

常系数线性微分方程

一、定理

形式如 $y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x)$ (*)

(其中 p_1, p_2 为常数) 的方程, 成为二阶常系数线性非齐次微分方程。

形式如 $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$ (**)

的方程称为相应与 (*) 的二阶常系数线性齐次微分方程。

二、求解二阶常系数线性齐次方程

求 $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$ 的通解的求解步骤为:

(1) 求解其特征方程 $r^2 + p_1 r + p_2 = 0$ 。

(2) 设 r_1, r_2 为其两个特征根。

①若 $r_1 \neq r_2$ (r_1, r_2 为两个实数), 则微分方程 (**) 的通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ 。

②若 $r_1 = r_2$, 则微分方程 (**) 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$ 。

③ $r_1 = a + ib, r_2 = a - ib$, 则微分方程 (**) 的通解为 $y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$ 。

三、二阶常系数线性非齐次微分方程的解

求二阶常系数线性非齐次微分方程 $y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x)$ 的一般步骤:

(1) 先求出其相应的齐次方程的通解 $Y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 。

(2) 再求出它的一个特解 y^* 。

(3) $Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*$ 即为方程 (*) 的通解。

求特解 y^* 的方法常用待定系数法:

如果 $f(x) = P_m(x) e^{\alpha x}$, 其中 $P_m(x)$ 为 x 的 m 次多项式, α 为实数, 则可设

$y^* = x^k Q_m(x) e^{\alpha x}$, 其中 $Q_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$ 为待定的完全多项式。若

α 不为特征根, 则取 $k = 0$; 若 α 为单特征根, 则取 $k = 1$; 若 α 为二重特征根, 则取 $k = 2$ 。