

成人高考专升本《高等数学（一）》考前模拟卷

第 I 卷

一、选择题(1-10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的 ()

- A. 充分条件
- B. 必要条件
- C. 充要条件
- D. 以上都不对

2 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{1+2x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 连续，则 k 等于 ()

- A. e^2
- B. e^{-2}
- C. 1
- D. 0

3. 若 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2} = 5$ ，则 ()

- A. $a=-9, b=14$
- B. $a=1, b=-6$
- C. $a=-2, b=0$
- D. $a=-2, b=-5$

4. 曲线 $y = \frac{e^x}{1+x}$ ()

- A. 有一个拐点
- B. 有两个拐点
- C. 有三个拐点
- D. 无拐点

5. $\int x^2 dx = (\quad)$

A. $3x^2 + C$

B. $\frac{x^3}{3} + C$

C. $x^3 + C$

D. $\frac{x}{2} + C$

6. 已知 $\int_0^k (2x - 3x^2) dx = 0$, 则 $k = (\quad)$

A. 0 或 1

B. 0 或 -1

C. 0 或 2

D. 1 或 -1

7. 由曲线 $y = \frac{1}{x}$, 直线 $y = x$, $x = 2$, 所围面积为 $(\quad)$

A. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - x \right) dx$

B. $\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) dx$

C. $\int_1^2 \left(2 - \frac{1}{y} \right) dy + \int_1^2 (2 - y) dy$

D. $\int_1^2 \left(2 - \frac{1}{x} \right) dx + \int_1^2 (2 - x) dx$

8. 设 $z = x^3 - 3x - y$, 则它在点 $(1, 0)$ 处 $(\quad)$

A. 取得极大值

B. 取得极小值

C. 无极值

D. 无法判定

9. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ，则数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ()

- A. 收敛
- B. 发散
- C. 收敛且和为零
- D. 可能收敛也可能发散

10. 微分方程 $y'' - 2y' = x$ 的特解应设为 ()

- A. Ax
- B. $Ax + B$
- C. $Ax^2 + Bx$
- D. $Ax^2 + Bx + C$

第 II 卷

二、填空题(11-20 小题，每小题 4 分，共 40 分)

11. 当 $x=1$ 时， $f(x) = x^3 + 3px + q$ 取到极值(其中 q 为任意常数)，则 $p =$ _____。

12. 设 $f(x) = \int_0^x |t| dt$ ， $f'(x) =$ _____。

13. 设 $f'(x^2) = \frac{1}{x}$ ，则 $f(x) =$ _____。

14. $f(x)$ 是连续的奇函数，且 $\int_0^1 f(x) dx = 1$ ，则 $\int_{-1}^0 f(x) dx =$ _____。

15. 设 $z = x^y$ ，则 $dz =$ _____。

16. 设 $I = \int_0^{16} dy \int_{\frac{y}{4}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$ 交换积分次序，则有 $I =$ _____。

17. 当 p _____时，反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p}{1+x} dx$ 收敛。

18. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 收敛还是发散，你的结论是_____。

19. $y \ln x dx + x \ln y dy = 0$ 的通解是_____。

20. $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解是_____。

三、解答题（21-28 题，共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤）

21. (本题满分 8 分)

设 $f(x) = \frac{(x-3)^{\frac{1}{x-3}}}{\sin(x-3)}$, 求 $f(x)$ 的间断点。

22. (本题满分 8 分)

设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{2}} = a$, 且 $f'(0)$ 存在, 求 $f'(0)$ 。

23. (本题满分 8 分)

给定曲线 $y = x^3$ 与直线 $y = px - q$ (其中 $p > 0$), 求 p 与 q 为何关系时, 直线 $y = px - q$ 是 $y = x^3$ 的切线。

24. (本题满分 8 分)

求 $\int \frac{1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}} dx$

25. (本题满分 8 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2^n}$ 的收敛半径和收敛区间。

26. (本题满分 10 分)

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

27. (本题满分 10 分)

计算 $\iint_D (x e^y + x^2 y^2) dx dy$, 其中 D 是由 $y = x^2$, $y = 4x^2$, $y=1$ 围成。

28. (本题满分 10 分)

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x^2} dx$$

2019 年成人高考专升本《高等数学（一）》考前模拟卷参考答案

一、选择题

1. 【答案】D

【解析】极限是否存在与函数在该点有无定义无关。

2. 【答案】A

【解析】由 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1+2x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{3}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x} \cdot 2} = e^2$

3. 【答案】B

【解析】因 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2} = 5$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + b) = 0$ ，因此 $4 + 2a + b = 0$ ，即

$$2a + b = -4 \text{ 或 } b = -4 - 2a,$$

$$\text{故 } 5 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax - 2a - 4}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2) + a(x-2)}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x+2+a) = 4+a$$

所以 $a = 1$, 而 $b = -6$

4. 【答案】D

【解析】因 $y' = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$, $y'' = \frac{e^x(1+x^2)}{(1+x)^3}$, 则 y'' 在定义域内恒不等于 0, 所以无拐点。

5. 【答案】B

【解析】 $\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C$

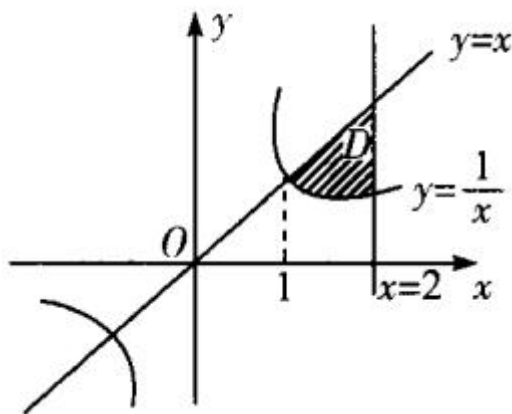
6. 【答案】A

【解析】 $\int_0^k (2x - 3x^2) dx = (x^2 - x^3) \Big|_0^k = k^2 - k^3 = k^2(1-k) = 0$

所以 $k=0$ 或者 $k=1$ 。

7. 【答案】B

【解析】曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y=x$, $x=2$, 所围成的区域 D 如图所示



$$\text{则 } S_D = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) dx.$$

8. 【答案】C

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3, \frac{\partial z}{\partial y} = -1 \neq 0$ ，显然点 $(1, 0)$ 不是驻点，故其处无极值。

9. 【答案】D

【解析】 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件，但不是充分条件，从 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

发散，即可知选 D。

10. 【答案】C

【解析】因 $f(x) = x$ 为一次函数，且特征方程为 $r^2 - 2r = 0$ ，得特征根为 $r_1 = 0, r_2 = 2$ ，

于是特解应设为 $y^* = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx$ 。

二、填空题

11. 【答案】-1

【解析】 $f'(x) = 3x^2 + 3p$ ， $f'(1) = 3 + 3p = 0$ ，所以 $p = -1$ 。

12. 【答案】 $|x|$

【解析】当 $x > 0$ 时， $f'(x) = \left(\int_0^x t dt \right)' = x$ ，当 $x < 0$ 时， $f'(x) = \left[\int_0^x (-t) dt \right]' = -x$ ，当 $x = 0$

时， $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x t dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ ，同理

$f'(0) = 0$ ，所以 $f'(0) = 0$ ，故 $f'(x) = |x|$ 。

13. 【答案】
$$\begin{cases} 2\sqrt{x} + C, & x > 0 \\ -2\sqrt{x} + C, & x < 0 \end{cases}$$

【解析】 令 $x^2 = t$, 则 $f'(t) = \frac{1}{\pm\sqrt{x}}$, 因此 $f(t) = \int f'(t)dt = \int \frac{1}{\pm\sqrt{t}}dt = 2(\pm\sqrt{t}) + C$, 所

以 $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} + C, & x > 0 \\ -2\sqrt{x} + C, & x < 0 \end{cases}$

14. 【答案】 -1

【解析】 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$, 因此 $\int_{-1}^0 f(x)dx = -\int_0^1 f(x)dx = -1$ 。

15. 【答案】 $y x^{y-1} dx + x^y \ln x dy$

【解析】 $z = x^y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = y x^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$, 所以 $dz = y x^{y-1} dx + x^y \ln x dy$

16. 【答案】 $\int_0^4 dx \int_{x^2}^{4x} f(x, y) dy$

【解析】 $I = \int_0^{16} dy \int_{\frac{y}{4}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$ 的积分区域

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 16, \frac{y}{4} \leq x \leq \sqrt{y} \right\} = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, x^2 \leq y \leq 4x \right\}$$

所以 $I = \int_0^4 dx \int_{x^2}^{4x} f(x, y) dy$

17. 【答案】 < 0

【解析】 若 $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x} dx$ 收敛, 必有 $p < 0$, 因如果 $p \geq 0$, 则当 $x > 1$ 时, $\frac{x^p}{1+x} > \frac{1}{1+x}$, 而

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx$ 发散, 故 $p < 0$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{x^p}{1+x} dx$ 收敛。

18. 【答案】 发散

【解析】 由 $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散, 所以原级数发散。

19. 【答案】 $(\ln x)^2 + (\ln y)^2 = C$

【解析】 分离变量得 $\frac{\ln x}{x} dx + \frac{\ln y}{y} dy = 0$, 积分得 $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + \frac{1}{2}(\ln y)^2 = C_1$

即 $(\ln x)^2 + (\ln y)^2 = C$

20. 【答案】 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

【解析】由 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的特征方程为 $r^2 - 2r - 3 = 0$, 得特征根为 $r_1 = 3, r_2 = -1$,

所以方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

三、解答题

21. 【答案】由题意知, 使 $f(x)$ 不成立的 x 值, 均为 $f(x)$ 的间断点, 故 $\sin(x-3) = 0$ 或 $x-3=0$ 时 $f(x)$ 无意义, 则间断点为

$$x-3 = k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\text{即 } x = 3 + k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

22. 【答案】

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{2}} = a,$$

$$\therefore a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x) - f(0)] - [f\left(\frac{x}{3}\right) - f(0)]}{\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{\frac{x}{2}} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{x}{3}\right) - f(0)}{\frac{x}{2}}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{x}{3}\right) - f(0)}{\frac{x}{3}}$$

$$= 2f'(0) - \frac{2}{3}f'(0) = \frac{4}{3}f'(0),$$

$$\therefore f'(0) = \frac{3}{4}a.$$

23. 【答案】由题意知, 在切点处有 $x^3 = px - q$,

两边对 x 的求导得 $3x^2 = p$,

$$\text{所以 } x^3 = 3x^3 - q, \text{ 即 } x = \sqrt[3]{\frac{q}{2}},$$

因此
$$p = 3\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}\right)^2}$$

24. 【答案】

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}} dx \\ &= \int \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{-2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \left(\int \sqrt{x-1} dx + \int \sqrt{x+1} dx \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} \right] + C \\ &= -\frac{1}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

25. 【答案】

令 $x^2 = t$, 先考虑 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{2^n}$,

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{2^n}$ 的收敛半径 $R = 2$,

$\therefore$ 当 $t < 2$ 即 $x^2 < 2$, 即 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ 时原级数收敛,

当 $x = \sqrt{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \cdot (\sqrt{2})^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$

发散,

当 $x = -\sqrt{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \cdot (-\sqrt{2})^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$

发散,

$\therefore$ 原级数的收敛区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

26. 【答案】记 $y = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$, 则 $\ln y = \frac{1}{x} \ln \frac{\sin x}{x}$

$$\begin{aligned} \text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \bullet \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin x}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = 1$ 。

27. 【答案】

. 因 D 关于 y 轴对称, 且 xe^y 是关于 x 的奇函数, $x^2 y^2$ 是关于 x 的偶函数,

$$\begin{aligned} \text{则 } I &= \iint_D x e^y dx dy + \iint_D x^2 y^2 dx dy \\ &= 0 + \iint_D x^2 y^2 dx dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= 2 \int_0^1 dy \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} x^2 y^2 dx \\ &= 2 \int_0^1 y^2 \left(\frac{1}{3} x^3 \Big|_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} \right) dy \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 \left(y^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{8} y^{\frac{7}{2}} \right) dy \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{7}{8} y^{\frac{7}{2}} dy \\ &= \frac{14}{24} \times \frac{2}{9} \left(y^{\frac{9}{2}} \Big|_0^1 \right) \\ &= \frac{7}{54}. \end{aligned}$$

28. 【答案】

$$\because 0 < \frac{1}{1+x^2} < 1,$$

$$\therefore 0 < \frac{x^n}{1+x^2} < x^n,$$

$$\text{故 } 0 < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x^2} dx < \int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx = \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1},$$

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right] = 0,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x^2} dx = 0.$$