

成人高考《高等数学（一）（专升本）》考前揭秘卷（一）

一、选择题（1~10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1、 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} =$ () .

- A、-6
- B、0
- C、6
- D、3

参考答案：A

答案解析：本题考查的是求极限。 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x - 3) = -6$ 因此选择 A.

2、设函数 $f(x) = x^4 + 3x - 1$ ，则 $f'(1) =$ () .

- A、4
- B、5
- C、6
- D、7

正确答案：D

答案解析：本题考查的是函数的导数。 $f'(x) = 4x^3 + 3$ ，将 $x = 1$ 代入，得 $f'(1) = 7$ ，因此选择 D.

3、如果 $f'(3) = 3$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3+x) - f(3-x)}{2x} =$ () .

- A、-6
- B、3
- C、3
- D、6

参考答案：C

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3+x) - f(3-x)}{2x} = f'(3) = 3$$

答案解析：本题考查的是导数的定义。因此选择 C.

4、函数 $y = 2xe^x$, 则 $y'' =$ ().

A、 $y = 2(x+2)e^x$

B、 $y = 2x^2e^x$

C、 $y = 2e^{2x}$

D、 $y = 2(x+1)e^x$

正确答案: A

答案解析: 本题考查的是函数的高阶导数. $y' = 2(x+1)e^x$, $y'' = 2(x+2)e^x$, 因此选择 A.

5、 $\int \cos x \, dx =$ ().

A、 $\cos x + C$

B、 $\sin x + C$

C、 $-\cos x + C$

D、 $-\sin x + C$

正确答案: B

答案解析: 本题考查的是不定积分的计算. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$, 因此选择 B.

6、若函数 $f(x) = \int_0^x \sin(2t) \, dt$, 则 $f'(x) =$ ().

A、 $\sin 2x$

B、 $2\sin 2x$

C、 $\cos 2x$

D、 $2\cos 2x$

正确答案: A

答案解析：本题考查的是变上限积分求导，因为 $\frac{d}{dx} \int_0^x f(t)dt = f(x)$ ，所以 $\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(2t)dt = \sin 2x$ ，因此选择 A.

7、直线 $\frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{9} = \frac{z}{1}$ 与平面 $4x - 3y + 7z = 6$ 的位置关系是（ ）.

- A、直线与平面斜交
- B、直线与平面垂直
- C、直线在平面内
- D、直线与平面平行

正确答案：D

答案解析：本题考查的是直线与平面的位置关系. 直线的方向向量是 $\mathbf{a} = \{5, 9, 1\}$ ，平面的法向量是 $\mathbf{b} = \{4, -3, 7\}$ ， $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 5 \times 4 + 9 \times (-3) + 1 \times 7 = 0$ ，并且直线上的点 $(2, -3, 0)$ 不在平面 $4x - 3y + 7z = 6$ 内，所以直线与平面平行，因此选择 D.

8、设函数 $z = x^3y - xy^3$ ，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ （ ）.

- A、 $6xy$
- B、 $3x^2 - 3y^2$
- C、 $-6xy$
- D、 $3y^2 - 3x^2$

正确答案：B

答案解析：本题考查的是二元函数的二阶偏导数. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^3$ ， $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 3x^2 - 3y^2$ ，因此选择 B.

9、设函数，则其驻点是（ ）.

- A、 $(0, 0)$
- B、 $(-1, 1)$
- C、 $(1, 1)$

D、 $(1, -1)$

正确答案：D

答案解析：本题考查的是二元函数的驻点 $\begin{cases} z_x = 2 - 2x = 0, \\ z_y = 2 + 2y = 0. \end{cases}$ 解得驻点是 $(1, -1)$ ，因此选择 D.

10、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}$ 的收敛半径 $R =$ ().

A、0

B、1

C、2

D、 $+\infty$

正确答案：B

答案解析：本题考查的是级数的收敛半径. $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+4}}{\frac{1}{n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+4} = 1$ ， $R = \frac{1}{\rho} = 1$ ，所以收敛半径是 1，因此选择 B.

二、填空题（11~20 小题，每小题 4 分，共 40 分）

11、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 2 - 1} =$ _____.

参考答案：-1

答案解析：本题考查的是求极限. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 2 - 1} = \frac{0 - 1}{0 + 2 - 1} = -1$.

12、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 3}{4x^3 - 5} =$ _____.

参考答案： $\frac{1}{4}$

答案解析：本题考查的是求极限. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 3}{4x^3 - 5} = \frac{1}{4}$.

13、设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-2x}-1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

参考答案: -2

答案解析: 本题考查的是函数的连续性. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x} = -2$, 因为函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 所以 $a = -2$.

14、函数 $y = (x-1)^4 + 1$ 的拐点坐标是_____.

参考答案: $(1, 1)$

答案解析: 本题考查的是函数的拐点. , $y' = 4(x-1)^3$, $y'' = 12(x-1)^2$, 令 $y'' = 0$, 令 $y''' = 0$, 解得 $x = 1$, 所以拐点的坐标是 $(1, 1)$.

15、曲线 $y = -\frac{1}{x}$ 在点 $(-1, 1)$ 处的切线方程是_____.

参考答案: $x - y + 2 = 0$

答案解析: 本题考查的是曲线的切线 $y' = \frac{1}{x^2}$, 当 $x = -1$ 时, $y' = 1$, 所以曲线在点 $(-1, 1)$ 处的切线方程是 $y - 1 = x + 1$, 整理得 $x - y + 2 = 0$.

16、曲线 $y = \frac{x}{x^3-1}$ 的铅直渐近线方程是_____.

参考答案: $x = 1$

答案解析: 本题考查的是曲线的铅直渐近线. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^3-1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^3-1} = -\infty$, 所以 $x = 1$ 是曲线的铅直渐近线.

17、 $\int \frac{dx}{(x+2)(x+3)} =$ _____.

$$\ln \left| \frac{x+2}{x+3} \right| + C$$

参考答案：

答案解析：本题考查的是不定积分的计

算.

$$\int \frac{dx}{(x+2)(x+3)} = \int \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \ln|x+2| - \ln|x+3| + C = \ln \left| \frac{x+2}{x+3} \right| + C.$$

18、 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^4 \sin x + \cos x) dx =$ _____.

参考答案：2

答案解析：本题考查的是对称区间上的积

分.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^4 \sin x + \cos x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^4 \sin x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

19、 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} =$ _____.

$$\frac{5}{2}$$

参考答案：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} = \frac{1}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{5}{2}.$$

答案解析：本题考查的是等比级数的级数和。

20、微分方程 $y' = 3x^2 y$ 的通解为 $y =$ _____.

参考答案： Ce^{x^3}

答案解析：本题考查的是可分离变量的微分方程。变量分离可得， $\frac{1}{y} dy = 3x^2 dx$ ，两边同时积分得， $\ln|y| = x^3 + C_1$ ，整理得， $y = Ce^{x^3}$.

三、解答题（21~28 题，共 49 分。解答应写出推理、演算步骤）

21、求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x$.

参考答案: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{4}}\right)^{\frac{x-2}{4} \times 4+2} = e^4$.

答案解析: 本题考查的是两个重要极限. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{4}}\right)^{\frac{x-2}{4} \times 4+2} = e^4$.

22、设函数 $f(x) = \arctan \frac{1-x}{1+x}$, 求 $f'(x)$.

参考答案: $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \times \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)} \times \frac{-2}{(1+x)^2} = -\frac{1}{1+x^2}$.

答案解析: 本题考查的是复合函数求导. $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \times \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)} \times \frac{-2}{(1+x)^2} = -\frac{1}{1+x^2}$.

23、求 $\int 2x \ln x dx$.

参考答案:

$$\int 2x \ln x dx = \int \ln x dx^2 = \ln x \cdot x^2 - \int x^2 d(\ln x) = x^2 \ln x - \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = x^2 \ln x - \int x dx = x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 + C.$$

答案解析: 本题考查的是不定积分的分部积分法。

$$\int 2x \ln x dx = \int \ln x dx^2 = \ln x \cdot x^2 - \int x^2 d(\ln x) = x^2 \ln x - \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = x^2 \ln x - \int x dx = x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 + C.$$

24、求 $\int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$.

参考答案:

$$\int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{1}{(e^x)^2 + 1} de^x = \arctan e^x \Big|_0^{\ln \sqrt{3}} = \frac{\pi}{12}.$$

答案解析: 本题考查的是定积分的换元积分法。

$$\int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{1}{(e^x)^2 + 1} de^x = \arctan e^x \Big|_0^{\ln \sqrt{3}} = \frac{\pi}{12}.$$

25、求由曲线 $y = e^x$ 与直线 $y = 1$, $x = 0$, $x = 2$ 所围图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

$$V = \pi \int_0^2 [(e^x)^2 - 1] dx = \pi (\int_0^2 e^{2x} dx - 2) = (\frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^2 - 2) \pi = \frac{\pi}{2} (e^4 - 5)$$

参考答案:

答案解析: 本题考查的是定积分的应

$$V = \pi \int_0^2 [(e^x)^2 - 1] dx = \pi (\int_0^2 e^{2x} dx - 2) = (\frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^2 - 2) \pi = \frac{\pi}{2} (e^4 - 5)$$

用

26、设函数 $f(x) = x^3 - 9x^2 - 21x + 3$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的凹、凸区间.

参考答案:

(1) $f'(x) = 3x^2 - 18x - 21 = 3(x - 7)(x + 1)$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 7$, $x_2 = -1$. 当 $x > 7$ 或 $x < -1$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $-1 < x < 7$ 时, $f'(x) < 0$. 所以 $f(x)$ 单调递增区间是 $(-\infty, -1)$ 和 $(7, +\infty)$, 单调递减区间是 $(-1, 7)$. 当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $f(-1) = 14$; 当 $x = 7$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $f(7) = -242$.

(2) $f''(x) = 6x - 18$, 令 $f''(x) = 0$, 解得 $x = 3$. 当 $x > 3$ 时, $f''(x) > 0$; 当 $x < 3$ 时, $f''(x) < 0$. 所以 $f(x)$ 的凹区间是 $(3, +\infty)$, 凸区间是 $(-\infty, 3)$.

答案解析: 本题考查的是导数的应用. (1) $f'(x) = 3x^2 - 18x - 21 = 3(x - 7)(x + 1)$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 7$, $x_2 = -1$. 当 $x > 7$ 或 $x < -1$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $-1 < x < 7$ 时, $f'(x) < 0$. 所以 $f(x)$ 单调递增区间是 $(-\infty, -1)$ 和 $(7, +\infty)$, 单调

递减区间是 $(-1, 7)$. 当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $f(-1) = 14$; 当 $x = 7$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $f(7) = -242$.

(2) $f''(x) = 6x - 18$, 令 $f''(x) = 0$, 解得 $x = 3$. 当 $x > 3$ 时, $f''(x) > 0$; 当 $x < 3$ 时, $f''(x) < 0$. 所以 $f(x)$ 的凹区间是 $(3, +\infty)$, 凸区间是 $(-\infty, 3)$.

27、求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 8e^x$ 的通解.

参考答案: 对应的齐次微分方程的特征方程是 $r^2 - 3r + 2 = 0$, 解得 $r = 1, r = 2$, 所以齐次方程的通解是 $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$, 设 $y^* = A x e^x$,

则 $y^{*'} = A(x+1)e^x$, $y^{*''} = A(x+2)e^x$, 将 $y^*, y^{*'}, y^{*''}$ 代入原方程

得 $A(x+2)e^x - 3A(x+1)e^x + 3A x e^x = 8e^x$, 解得 $A = 8$, 所以 $y^* = 8x e^x$, 因此原方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 8x e^x$.

答案解析: 本题考查的是二阶线性非齐次微分方程. 对应的齐次微分方程的特征方程

是 $r^2 - 3r + 2 = 0$, 解得 $r = 1, r = 2$, 所以齐次方程的通解是 $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$,

设 $y^* = A x e^x$, 则 $y^{*'} = A(x+1)e^x$, $y^{*''} = A(x+2)e^x$, 将 $y^*, y^{*'}, y^{*''}$ 代入原方程

得 $A(x+2)e^x - 3A(x+1)e^x + 2A x e^x = 8e^x$, 解得 $A = -8$, 所以 $y^* = -8x e^x$, 因

此原方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 8x e^x$.

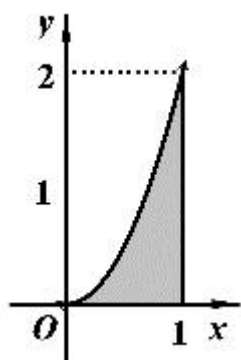
$$\iint_D xy dx dy$$

28、计算

, 其中积分区域 D 由 $y = 2x^2$, $x = 1$, $y = 0$ 围成.

参考答案：根据题意作图，由图可知区域 D 可以表示为 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2x^2 \end{cases}$ ，所以

$$\iint_D xy dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2x^2} xy dy = \int_0^1 \frac{1}{2} xy^2 \Big|_0^{2x^2} dx = \int_0^1 2x^5 dx = \frac{1}{3} x^6 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$



答案解析：本题考查的是二重积分的计算。根据题意作图，由图可知区域 D 可以表示

为 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2x^2 \end{cases}$ ，所以

$$\iint_D xy dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2x^2} xy dy = \int_0^1 \frac{1}{2} xy^2 \Big|_0^{2x^2} dx = \int_0^1 2x^5 dx = \frac{1}{3} x^6 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

