

## 成考《专升本-数学》复习必背公式

### 一些初等函数:

$$\text{双曲正弦: } shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{双曲余弦: } chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{双曲正切: } thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$arshx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$archx = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$arthx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

### 两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e = 2.718281828459045 \dots$$

### 三角函数公式:

#### • 诱导公式:

| 函数<br>角 A            | sin           | cos           | tg                          | ctg                         |
|----------------------|---------------|---------------|-----------------------------|-----------------------------|
| $-\alpha$            | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$  | $-\operatorname{tg}\alpha$  | $-\operatorname{ctg}\alpha$ |
| $90^\circ - \alpha$  | $\cos\alpha$  | $\sin\alpha$  | $\operatorname{ctg}\alpha$  | $\operatorname{tg}\alpha$   |
| $90^\circ + \alpha$  | $\cos\alpha$  | $-\sin\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$  |
| $180^\circ - \alpha$ | $\sin\alpha$  | $-\cos\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$  | $-\operatorname{ctg}\alpha$ |
| $180^\circ + \alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$   | $\operatorname{ctg}\alpha$  |
| $270^\circ - \alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$  | $\operatorname{tg}\alpha$   |
| $270^\circ + \alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\sin\alpha$  | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$  |
| $360^\circ - \alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$  | $-\operatorname{tg}\alpha$  | $-\operatorname{ctg}\alpha$ |
| $360^\circ + \alpha$ | $\sin\alpha$  | $\cos\alpha$  | $\operatorname{tg}\alpha$   | $\operatorname{ctg}\alpha$  |

#### • 和差角公式:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}$$

#### • 和差化积公式:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$ds = \sqrt{(1 + y'^2)^2} dx$$

直线:  $K = 0$ ;

半径为  $a$  的圆:  $K = \frac{1}{a}$ .

### 定积分的近似计算:

$$\text{矩形法: } \int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1})$$

$$\text{梯形法: } \int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n} \left[ \frac{1}{2} (y_0 + y_n) + y_1 + \cdots + y_{n-1} \right]$$

$$\text{抛物线法: } \int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{3n} [(y_0 + y_n) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1})]$$

### 定积分应用相关公式:

$$\text{功: } W = F \cdot s$$

$$\text{水压力: } F = p \cdot A$$

$$\text{引力: } F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}, k \text{ 为引力系数}$$

$$\text{函数的平均值: } \bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{均方根: } \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(t) dt}$$

### 空间解析几何和向量代数:

$$\text{空间2点的距离: } d = |M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\text{向量在轴上的投影: } \text{Pr}_{j_u} \overline{AB} = |\overline{AB}| \cdot \cos \varphi, \varphi \text{ 是 } \overline{AB} \text{ 与 } u \text{ 轴的夹角。}$$

$$\text{Pr}_{j_u} (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \text{Pr}_{j_u} \vec{a}_1 + \text{Pr}_{j_u} \vec{a}_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \text{ 是一个数量,}$$

$$\text{两向量之间的夹角: } \cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \theta. \text{ 例: 线速度: } \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

$$\text{向量的混合积: } [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \alpha, \alpha \text{ 为锐角时,}$$

代表平行六面体的体积。

平面的方程:

1、点法式:  $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ , 其中  $\vec{n}=\{A,B,C\}, M_0(x_0,y_0,z_0)$

2、一般方程:  $Ax+By+Cz+D=0$

3、截距式方程:  $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

平面外任意一点到该平面的距离:  $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

空间直线的方程:  $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$ , 其中  $\vec{s}=\{m,n,p\}$ ; 参数方程: 
$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

二次曲面:

1、椭球面:  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

2、抛物面:  $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$ , ( $p,q$  同号)

3、双曲面:

单叶双曲面:  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面:  $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$  (马鞍面)

#### 多元函数微分法及应用

全微分:  $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$        $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$

全微分的近似计算:  $\Delta z \approx dz = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$

多元复合函数的求导法:

$z=f[u(t),v(t)]$        $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}$

$z=f[u(x,y),v(x,y)]$        $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

当  $u=u(x,y)$ ,  $v=v(x,y)$  时,

$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$        $dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$

隐函数的求导公式:

隐函数  $F(x,y)=0$ ,       $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$ ,       $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\cdot\frac{dy}{dx}$

隐函数  $F(x,y,z)=0$ ,       $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$ ,       $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$

$$\text{隐函数方程组: } \begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \quad J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} & \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} & \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)} \end{aligned}$$

**微分法在几何上的应用:**

$$\text{空间曲线 } \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \text{ 在点 } M(x_0, y_0, z_0) \text{ 处的切线方程: } \frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y-y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

$$\text{在点 } M \text{ 处的法平面方程: } \varphi'(t_0)(x-x_0) + \psi'(t_0)(y-y_0) + \omega'(t_0)(z-z_0) = 0$$

$$\text{若空间曲线方程为: } \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}, \text{ 则切向量 } \vec{T} = \left\{ \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \right\}$$

曲面  $F(x, y, z) = 0$  上一点  $M(x_0, y_0, z_0)$ , 则:

$$1、\text{过此点的法向量: } \vec{n} = \{F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\}$$

$$2、\text{过此点的切平面方程: } F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0$$

$$3、\text{过此点的法线方程: } \frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

**方向导数与梯度:**

$$\text{函数 } z = f(x, y) \text{ 在一点 } p(x, y) \text{ 沿任一方向 } l \text{ 的方向导数为: } \frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi$$

其中  $\varphi$  为  $x$  轴到方向  $l$  的转角。

$$\text{函数 } z = f(x, y) \text{ 在一点 } p(x, y) \text{ 的梯度: } \text{grad} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$$

它与方向导数的关系是:  $\frac{\partial f}{\partial l} = \text{grad} f(x, y) \cdot \vec{e}$ , 其中  $\vec{e} = \cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j}$ , 为  $l$  方向上的单位向量。

$\therefore \frac{\partial f}{\partial l}$  是  $\text{grad} f(x, y)$  在  $l$  上的投影。

**多元函数的极值及其求法:**

$$\text{设 } f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0, \text{ 令: } f_{xx}(x_0, y_0) = A, \quad f_{xy}(x_0, y_0) = B, \quad f_{yy}(x_0, y_0) = C$$

$$\text{则: } \begin{cases} AC - B^2 > 0 \text{ 时, } \begin{cases} A < 0, (x_0, y_0) \text{ 为极大值} \\ A > 0, (x_0, y_0) \text{ 为极小值} \end{cases} \\ AC - B^2 < 0 \text{ 时, } & \text{无极值} \\ AC - B^2 = 0 \text{ 时, } & \text{不确定} \end{cases}$$

平面的方程：

1、点法式： $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ ，其中 $\vec{n}=\{A,B,C\}, M_0(x_0,y_0,z_0)$

2、一般方程： $Ax+By+Cz+D=0$

3、截距式方程： $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

平面外任意一点到该平面的距离： $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

空间直线的方程： $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$ ，其中 $\vec{s}=\{m,n,p\}$ ；参数方程：
$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

二次曲面：

1、椭球面： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

2、抛物面： $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$ ，( $p,q$ 同号)

3、双曲面：

单叶双曲面： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面： $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$  (马鞍面)

#### 多元函数微分法及应用

全微分： $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$        $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$

全微分的近似计算： $\Delta z \approx dz = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$

多元复合函数的求导法：

$z=f[u(t),v(t)]$        $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}$

$z=f[u(x,y),v(x,y)]$        $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

当 $u=u(x,y)$ ， $v=v(x,y)$ 时，

$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$        $dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$

隐函数的求导公式：

隐函数 $F(x,y)=0$ ，       $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$ ，       $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\cdot\frac{dy}{dx}$

隐函数 $F(x,y,z)=0$ ，       $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$ ，       $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$

第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）：

设  $L$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ ，则：

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b \{P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\} dt$$

两类曲线积分之间的关系： $\int_L P dx + Q dy = \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds$ ，其中  $\alpha$  和  $\beta$  分别为  $L$  上积分起止点处切向量的方向角。

格林公式： $\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy$  格林公式： $\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy$

当  $P = -y, Q = x$ ，即： $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$  时，得到  $D$  的面积： $A = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$

平面上曲线积分与路径无关的条件：

1、 $G$  是一个单连通区域；

2、 $P(x, y), Q(x, y)$  在  $G$  内具有一阶连续偏导数，且  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 。注意奇点，如  $(0,0)$ ，应

减去对此奇点的积分，注意方向相反！

二元函数的全微分求积：

在  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  时， $P dx + Q dy$  才是二元函数  $u(x, y)$  的全微分，其中：

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \text{ 通常设 } x_0 = y_0 = 0.$$

**曲面积分：**

对面积的曲面积分： $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) ds = \iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy$

对坐标的曲面积分： $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$ ，其中：

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy, \text{ 取曲面的上侧时取正号；}$$

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z] dy dz, \text{ 取曲面的前侧时取正号；}$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{zx}} Q[x, y(z, x), z] dz dx, \text{ 取曲面的右侧时取正号。}$$

两类曲面积分之间的关系： $\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$

**高斯公式:**

$$\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \oiint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

高斯公式的物理意义 —— 通量与散度:

散度:  $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ , 即: 单位体积内所产生的流体质量, 若  $\operatorname{div} \vec{v} < 0$ , 则为消失

$$\text{通量: } \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \iint_{\Sigma} A_n ds = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds,$$

$$\text{因此, 高斯公式又可写成: } \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A} dv = \oiint_{\Sigma} A_n ds$$

**斯托克斯公式——曲线积分与曲面积分的关系:**

$$\iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$$

$$\text{上式左端又可写成: } \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

空间曲线积分与路径无关的条件:  $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$$\text{旋度: } \operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\text{向量场 } \vec{A} \text{ 沿有向闭曲线 } \Gamma \text{ 的环流量: } \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot \vec{\tau} ds$$

**常数项级数:**

$$\text{等比数列: } 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\text{等差数列: } 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}$$

调和级数:  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$  是发散的

### 级数审敛法:

1、正项级数的审敛法 — 根植审敛法 (柯西判别法):

$$\text{设: } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}, \text{ 则 } \begin{cases} \rho < 1 \text{ 时, 级数收敛} \\ \rho > 1 \text{ 时, 级数发散} \\ \rho = 1 \text{ 时, 不确定} \end{cases}$$

2、比值审敛法:

$$\text{设: } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}, \text{ 则 } \begin{cases} \rho < 1 \text{ 时, 级数收敛} \\ \rho > 1 \text{ 时, 级数发散} \\ \rho = 1 \text{ 时, 不确定} \end{cases}$$

3、定义法:

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n; \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \text{ 存在, 则收敛; 否则发散。}$$

交错级数  $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$  (或  $-u_1 + u_2 - u_3 + \dots, u_n > 0$ ) 的审敛法 — 莱布尼兹定理:

$$\text{如果交错级数满足 } \begin{cases} u_n \geq u_{n+1} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \end{cases}, \text{ 那么级数收敛且其和 } s \leq u_1, \text{ 其余项 } r_n \text{ 的绝对值 } |r_n| \leq u_{n+1}.$$

### 绝对收敛与条件收敛:

(1)  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ , 其中  $u_n$  为任意实数;

(2)  $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots$

如果 (2) 收敛, 则 (1) 肯定收敛, 且称为绝对收敛级数;

如果 (2) 发散, 而 (1) 收敛, 则称 (1) 为条件收敛级数。

$$\text{调和级数: } \sum \frac{1}{n} \text{ 发散, 而 } \sum \frac{(-1)^n}{n} \text{ 收敛;}$$

$$\text{级数: } \sum \frac{1}{n^2} \text{ 收敛;}$$

$$p \text{ 级数: } \sum \frac{1}{n^p} \begin{cases} p \leq 1 \text{ 时发散} \\ p > 1 \text{ 时收敛} \end{cases}$$

### 幂级数:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \begin{cases} |x| < 1 \text{ 时, 收敛于 } \frac{1}{1-x} \\ |x| \geq 1 \text{ 时, 发散} \end{cases}$$

对于级数 (3)  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$ , 如果它不是仅在原点收敛, 也不是在全

数轴上都收敛, 则必存在  $R$ , 使  $\begin{cases} |x| < R \text{ 时收敛} \\ |x| > R \text{ 时发散} \\ |x| = R \text{ 时不定} \end{cases}$ , 其中  $R$  称为收敛半径。

$$\text{求收敛半径的方法: 设 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho, \text{ 其中 } a_n, a_{n+1} \text{ 是 (3) 的系数, 则 } \begin{cases} \rho \neq 0 \text{ 时, } R = \frac{1}{\rho} \\ \rho = 0 \text{ 时, } R = +\infty \\ \rho = +\infty \text{ 时, } R = 0 \end{cases}$$

### 函数展开成幂级数:

函数展开成泰勒级数:  $f(x) = f(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$

余项:  $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ ,  $f(x)$  可以展开成泰勒级数的充要条件是:  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$

$x_0 = 0$  时即为麦克劳林公式:  $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$

### 一些函数展开成幂级数:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

### 欧拉公式:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{或} \quad \begin{cases} \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

### 三角级数:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

其中,  $a_0 = 2A_0$ ,  $a_n = A_n \sin \varphi_n$ ,  $b_n = A_n \cos \varphi_n$ ,  $\omega t = x$ .

正交性:  $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$  任意两个不同项的乘积在  $[-\pi, \pi]$  上的积分 = 0.

### 傅立叶级数:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad \text{周期} = 2\pi$$

$$\text{其中} \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} \quad \left/ \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \text{ (相加)} \right.$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots = \frac{\pi^2}{24} \quad \left/ \quad 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12} \text{ (相减)} \right.$$

$$\text{正弦级数: } a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad f(x) = \sum b_n \sin nx \text{ 是奇函数}$$

$$\text{余弦级数: } b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx \text{ 是偶函数}$$

## 二阶常系数齐次线性微分方程及其解法：

(\*) $y'' + py' + qy = 0$ ，其中 $p, q$ 为常数；

求解步骤：

1、写出特征方程： $(\Delta)r^2 + pr + q = 0$ ，其中 $r^2$ ， $r$ 的系数及常数项恰好是(\*)式中 $y''$ ， $y'$ ， $y$ 的系数；

2、求出 $(\Delta)$ 式的两个根 $r_1, r_2$

3、根据 $r_1, r_2$ 的不同情况，按下表写出(\*)式的通解：

| $r_1, r_2$ 的形式                                                                                                                           | (*)式的通解                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| 两个不相等实根( $p^2 - 4q > 0$ )                                                                                                                | $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$                      |
| 两个相等实根( $p^2 - 4q = 0$ )                                                                                                                 | $y = (c_1 + c_2 x) e^{r_1 x}$                            |
| 一对共轭复根( $p^2 - 4q < 0$ )<br>$r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$<br>$\alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$ | $y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ |

## 二阶常系数非齐次线性微分方程

$y'' + py' + qy = f(x)$ ， $p, q$ 为常数

$f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$ 型， $\lambda$ 为常数；

$f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos ax + P_s(x) \sin ax]$ 型