

专升本数学必背知识点

第一章 函数的极限和连续性

第一节 函数

一、求函数的值或表达式

【例题】 若 $f(x) = 2x + 3$, 则 $f(x-1) = (\quad)$.

A. $2x-1$ B. $2x+1$ C. $2x+2$ D. $x+2$

【答案】 B

【解析】 $f(x-1) = 2(x-1) + 3 = 2x - 2 + 3 = 2x + 1$.

二、函数 $f(x)$ 的三要素

1. 定义域: x 的取值范围

(1) 常见函数的定义域

a. 函数 $y = \frac{1}{x}$, 其中 $x \neq 0$.

b. 函数 $y = \sqrt{x}$, 其中 $x \geq 0$.

c. 函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 其中 $x > 0$.

(2) 函数的间断点

2. 对应法则: f 运算程序

3. 值域: y 的取值范围

三、基本初等函数

1. 常函数 $y = c$ (c 为常数);

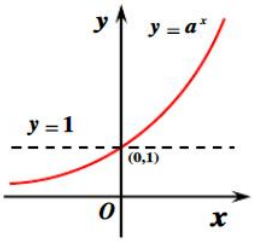
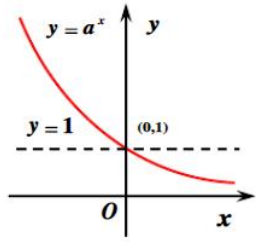
2. 幂函数 $y = x^a$ (a 为实数);

(1) 幂为负数时, $y = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ “不看负号, 分之一”

(2) 幂为分数时, $y = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$ 遵循“上里下外”

3. 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

(1) 指数函数图表:

定义	函数 $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 叫做指数函数	
图象	$a > 1$	$0 < a < 1$
		
定义域	R	
值域	$(0, +\infty)$	
过定点	图象过定点 $(0, 1)$, 即当 $x = 0$ 时, $y = 1$.	
奇偶性	非奇非偶	
单调性	在 R 上是增函数	在 R 上是减函数

(2) 指数函数常用公式:

a. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

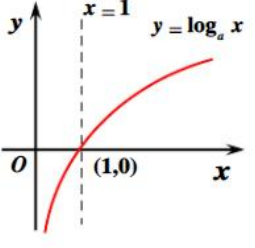
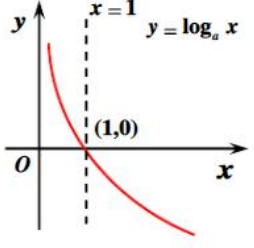
b. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

c. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

d. $(ab)^n = a^n b^n$

4. 对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$

(1) 对数函数图表:

定义	函数 $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 叫做对数函数	
图象	$a > 1$	$0 < a < 1$
		
定义域	$(0, +\infty)$	
值域	R	
过定点	图象过定点 $(1, 0)$, 即当 $x = 1$ 时, $y = 0$.	
奇偶性	非奇非偶	
单调性	在 $(0, +\infty)$ 上是增函数	在 $(0, +\infty)$ 上是减函数

(2) 对数函数常用公式:

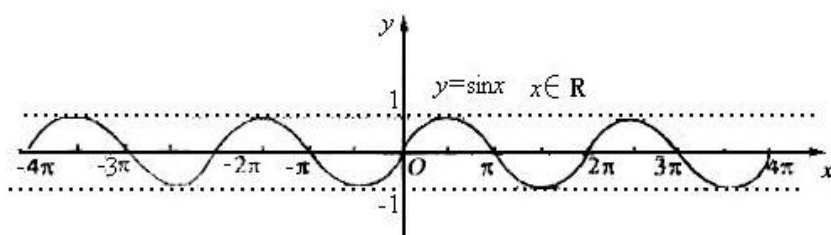
a. $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

b. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

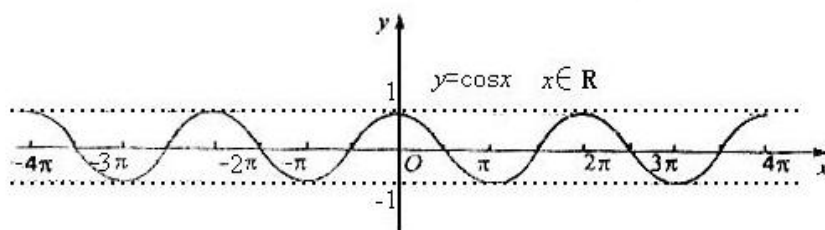
c. $\log_a M^n = n \log_a M$

5. 三角函数

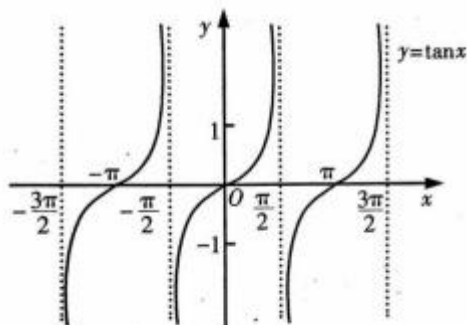
(1) 正弦函数 $y = \sin x$



(2) 余弦函数 $y = \cos x$



(3) 正切函数 $y = \tan x$



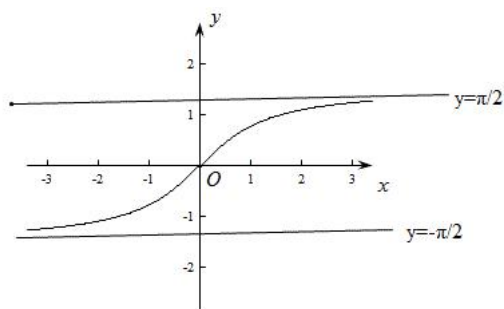
(4) 余切函数 $y = \cot x$

6. 反三角函数

(1) 反正弦函数 $y = \arcsin x$

(2) 反余弦函数 $y = \arccos x$

(3) 反正切函数 $y = \arctan x$



(4) 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$

【补充】三角函数特殊值

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
角 α 的 弧度数	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0	不存在	0
$\cot \alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	不存在	0	不存在

四、函数的性质

1. 单调性

设函数 $y = f(x)$ 在某区间内有定义，如果对于任意两点 $x_1 < x_2$,

(1) 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在该区间上单调增加.

(2) 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在该区间上单调减少.

2. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 在某区间内有定义，若存在 $M > 0$, 对该区间内任意的

x , 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $y = f(x)$ 在该区间上有界。

第二节 极 限

一、极限运算（直接代入）

1. 数列极限

如果当 $n \rightarrow \infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 无限趋近于某个确定的常数 a ，则称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ 或者 } x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty).$$

上式可读作“当 n 趋于无穷大时， x_n 的极限等于 a 或 x_n 趋于 a ”。

如果不存在这样的常数 a ，就说数列 $\{x_n\}$ 没有极限，或者说数列 $\{x_n\}$ 发散，习惯上也称 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在。

2. 函数极限

（1）左极限

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一个左侧区间 $(x_0 - \delta, x_0)$ 有定义，当 x 从 x_0 的左侧趋近于 x_0 （记作 $x \rightarrow x_0^-$ ）时，函数 $f(x)$ 无限趋近于某一个确定的常数 A ，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限，记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A (f(x_0^-) = A).$$

（2）右极限

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一个右侧区间 $(x_0, x_0 + \delta)$ 有定义，当 x 从 x_0 的右侧趋近于 x_0 （记作 $x \rightarrow x_0^+$ ）时，函数 $f(x)$ 无限趋近于某一个确定的常数 A ，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限，记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A (f(x_0^+) = A).$$

（3）极限的充要条件

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

（4）运算法则

设有函数 $f(x), g(x)$ ，若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ， $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ ，则

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B.$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B.$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0).$$

二、两个重要极限

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{即} \quad \lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \quad \text{即} \quad \lim_{\square \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{\square})^\square = e \quad \text{或} \quad \lim_{\square \rightarrow 0} (1 + \square)^{\frac{1}{\square}} = e$$

【例题】 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x}}$

【答案】 e^{-3}

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (-3x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (-3x)]^{\frac{1}{-3x} \cdot (-3)} = e^{-3}.$

三、无穷小量

1. 等价无穷小

当 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sim \sin x$, $x \sim \tan x$, $x \sim \arcsin x$, $x \sim \arctan x$,

$$x \sim \ln(1+x), \quad x \sim e^x - 1, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax (a \text{ 为实常数}, a \neq 0).$$

即, 当 $\square \rightarrow 0$ 时, $\square \sim \sin \square$, $\square \sim \tan \square$, $\square \sim \arcsin \square$, $\square \sim \arctan \square$,

$$\square \sim \ln(1+\square), \quad \square \sim e^\square - 1, \quad 1 - \cos \square \sim \frac{1}{2}\square^2,$$

$$(1+\square)^a - 1 \sim a\square (a \text{ 为实常数}, a \neq 0).$$

【例题】 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sin(x-2)}$

【答案】 1

【解析】 $\because x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$

$\therefore x \rightarrow 2$ 时, $x-2 \rightarrow 0$, $\sin(x-2) \sim x-2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sin(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2} = 1$$

2. 无穷小量的比较

设 $f(x), g(x)$ 是同一变化过程中的无穷小, $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 这一过程中的极限,

那么:

(1) 如果 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, 则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 的高阶无穷小.

(2) 如果 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, 则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 的低阶无穷小.

(3) 如果 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小.

(4) 如果 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小, 记作

$$f(x) \sim g(x).$$

四、分子分母同时除以指数最高次幂 (“抓大头”):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0} = \begin{cases} 0, & m < n; \\ \frac{a_m}{b_n}, & m = n; \\ \infty, & m > n. \end{cases}$$

五、曲线的渐近线

1. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ (常数), 则直线 $y = a$ 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

2. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则直线 $x = x_0$ 是曲线 $y = f(x)$ 的铅直渐近线.

第三节 连续

一、分段函数的连续性

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

【例题】若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则常数 $a =$

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

【答案】B

【解析】函数在 $x = 0$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2} = a = f(0)$.

第二章 微分学

第一节 导数与微分

一、求导公式

(1) $C' = 0$ (C 为常数)

(2) $(x^n)' = nx^{n-1}$ ($n \in R$)

(3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ($a > 0, a \neq 1$)

(4) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

(5) $(a^x)' = a^x \ln a$ ($a > 0, a \neq 1$)

(6) $(e^x)' = e^x$

(7) $(\sin x)' = \cos x$

(8) $(\cos x)' = -\sin x$

(9) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

(10) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

(11) $(\sec x)' = \tan x \sec x$

(12) $(\csc x)' = -\cot x \csc x$

(13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(15) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

(16) $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

二、微分

按微分公式 $dy = y'dx$, 微分运算则可转化为求导运算. 计算微分, 只需

先求出 y' ，代入公式即可求得微分。

【例题】 $y = 2x + \sin x$ ，求 $dy =$ _____。

【答案】 $(2 + \cos x)dx$

【解析】 $y' = (2x)' + (\sin x)' = 2 + \cos x$,

$$dy = y'dx = (2 + \cos x)dx.$$

三、导数的四则运算

设函数 $u(x), v(x)$ 在点 x 处可导，则：

1. $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x).$

2. $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$

$[Cu(x)]' = Cu'(x)$, (C 是常数).

3. $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$, $[v(x) \neq 0];$

$$\left[\frac{1}{v(x)}\right]' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}, [v(x) \neq 0].$$

四、复合函数求导（链式法则）

设 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 复合成 $y = f[g(x)]$ ，若 $u = g(x)$ 在点 x 处可导，
 $y = f(u)$ 在相应点 $u = g(x)$ 可导，则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 x 可导，且有链式法则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x).$$

【例题】 设函数 $y = \sqrt{3 - 4x^2}$ ，求 y'

【答案】 $y' = -\frac{4x}{\sqrt{3 - 4x^2}}$

【解析】 $y = \sqrt{3-4x^2}$, 令 $y = \sqrt{u}$, $u = 3-4x^2$,

$$y' = (\sqrt{u})' \cdot (3-4x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (-8x) = -\frac{4x}{\sqrt{3-4x^2}}$$

五、高阶导数

运用求导公式有几阶求几次导。

六、参数方程求导

设方程是由 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ 所确定, 其中 $f(t)$, $g(t)$ 为可导函数, $f'(t) \neq 0$,

则:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

【例题】 设函数 $\begin{cases} x = 1+2t^2 \\ y = \sin t \end{cases}$, 求 y'

【解析】 $y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(\sin t)'}{(1+2t^2)'} = \frac{\cos t}{4t}$.

七、隐函数求导

设 $y = f(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 确定, 求 y' 只需直接由方程 $F(x, y) = 0$ 关于 x 求导, 将 y 认作中间变量, 用复合函数链式法则.

口诀: 逐项求导, 遇 y 乘 y' .

【例题】 设函数 $x^2 + 3y^4 + x + 2y = 1$, 求 y'

【解析】 等号两边同时对 x 求导得, $2x + 12y^3 y' + 1 + 2y' = 0$,

提出 y' 得, $(12y^3 + 2)y' = -1 - 2x$,

$$\text{移项得, } y' = \frac{-1-2x}{12y^3+2}.$$

第二节 洛必达法则

一、 $\frac{0}{0}$ 型

如果函数 $f(x), g(x)$ 满足条件:

1. 在点 x_0 的某一去心邻域 (或 $|x| > N$) 内可导, 且 $g'(x) \neq 0$;
2. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = 0, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = 0$;
3. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大),

$$\text{则 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

【例题】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - e^x}{\sin x}$

【答案】 -2

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - e^x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{-x} - e^x)'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{-x} - e^x}{\cos x} = -2$

第三节 导数的应用

一、导数的几何意义

1. 切线斜率

函数 $y = f(x)$ 在切点 $(x_0, f(x_0))$ 处的导数 $f'(x_0)$ 即为切线的斜率.

2. 法线方程

曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

3. 切线方程

曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的法线方程为

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad (f'(x_0) \neq 0)$$

二、函数的单调性

设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导.

1. 若对于任意的 $x \in (a, b)$, 有 $f'(x) > 0$, 则 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上为单调增加的函数.

2. 若对于任意的 $x \in (a, b)$, 有 $f'(x) < 0$, 则 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上为单调减少的函数.

三、驻点

使得函数的导数值为零的点, 称为函数的驻点, 即 $f'(x) = 0$ 的根称为驻点.

四、极值

1. 定义

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义.

(1) 若除点 x_0 外, 在该邻域内, 恒有 $f(x) < f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$, 点 x_0 称为 $f(x)$ 的极大值点.

(2) 若除点 x_0 外, 在该邻域内, 恒有 $f(x) > f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值 $f(x_0)$, 点 x_0 称为 $f(x)$ 的极小值点.

函数的极大值与极小值统称为函数的极值, 函数的极大值点与极小值点统称为函数的极值点.

2. 函数取得极值第一种充分条件

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内可导, 且 $f'(x_0) = 0$ (或在点 x_0 处 $f'(x)$ 不存在). 若在此邻域内:

(1) 当 $x < x_0$ 时 $f'(x) > 0$, 而当 $x > x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$.

(2) 当 $x < x_0$ 时 $f'(x) < 0$, 而当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值 $f(x_0)$.

若当 $x < x_0$ 与 $x > x_0$ 时, $f'(x)$ 不改变符号, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处不取得极值.

3. 函数取得极值第二种充分条件

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$. 若

(1) $f''(x_0) < 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$.

(2) $f''(x_0) > 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值 $f(x_0)$.

五、凹凸区间

如果在某区间内, 曲线弧位于其上任意一点切线的上方, 则称曲线在这个区间内是凹的; 如果在某区间内, 曲线弧位于其上任意一点切线的下方, 则称曲线在这个区间内是凸的.

判定方法: 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导.

1. 若在 (a, b) 内有 $f''(x) > 0$. 则曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内为凹的.

2. 若在 (a, b) 内有 $f''(x) < 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内为凸的.

六、拐点

连续曲线上凹弧和凸弧的分界点, 称为曲线的拐点.

对于在 (a, b) 内的连续曲线弧 $y = f(x)$, 判定拐点的一般方法是:

1. 求出该函数的二阶导数, 并求出使二阶导数等于零的点, 以及二阶导数不存在的点.

2. 判定上述各点两侧, 函数的二阶导数是否异号, 如果 $f''(x)$ 在 x_0 的两侧异号, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线弧 $y = f(x)$ 的拐点.

第四节 偏导数与全微分

一、一阶偏导

1. 表示方式:

二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处对 x 的偏导数, 常记为

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \text{ 或 } \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \text{ 或 } f_x(x_0, y_0) \text{ 或 } z_x \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}.$$

同理, 函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处对 y 的偏导数, 常记为

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \text{ 或 } \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \text{ 或 } f_y(x_0, y_0) \text{ 或 } z_y \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}.$$

2. 计算方法: 对于二元函数 $z = f(x, y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, 只需把 $f(x, y)$ 中的 y 看

成常数, 按一元函数求导法对 x 求导; 求 $\frac{\partial z}{\partial y}$, 只需把 $f(x, y)$ 中的 x 看成常数,

按一元函数求导法对 y 求导.

【例题】 设 $z = \ln(x + \frac{y}{x})$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,0)} = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】 1

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + \frac{y}{x}} (1 - \frac{y}{x^2}) = \frac{x^2 - y}{x^3 + xy}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,0)} = 1$

二、二阶偏导

1. 表示方式: 函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内偏导数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ 一般仍为 x, y 的二元函数, 可以对它们再次求偏导数 (若存在), 称偏导数的偏导数为二阶偏导数, 共有四种情形:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

2. 计算方法：与一阶偏导的方法相同，再次求偏导。

【例题】 设 $z = e^{xy}$ ，求该函数的二阶偏导数。

【答案】 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^{xy} + xye^{xy}.$

【解析】 由于 $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}$ ，所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = y^2 e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = e^{xy} + xye^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = e^{xy} + xye^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = x^2 e^{xy}$$

三、二元函数全微分

求二元函数 $z = f(x, y)$ 的全微分的方法：

先求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ ，然后代入微分计算公式 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ ，进而得

全微分。

【例题】 设 $z = 2xy^2 + xy$ ，求该函数的全微分。

【答案】 $dz = (2y^2 + y)dx + (4xy + x)dy.$

【解析】 由于 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2y^2 + y, \frac{\partial z}{\partial y} = 4xy + x$

$$\text{于是 } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (2y^2 + y)dx + (4xy + x)dy.$$

第三章 一元函数积分学

第一节 不定积分

函数 $f(x)$ 在区间 I 上的所有原函数的全体 $F(x) + C$ 叫做 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分, 记作 $\int f(x)dx$, 即 $\int f(x)dx = F(x) + C$.

其中记号 $\int$ 称为积分号, $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)dx$ 称为被积表达式, x 称为积分变量.

一、不定积分的性质

1. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ (k 为不等于 0 的常数).
2. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.
3. $(\int f(x)dx)' = f(x)$ 或 $d[\int f(x)dx] = f(x)dx$.
4. $\int f'(x)dx = f(x) + C$ 或 $\int df(x) = f(x) + C$.

二、不定积分基本公式

1. $\int 0dx = C$.
2. $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$ ($a \neq -1$).
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$, 特别地 $\int e^x dx = e^x + C$.
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$.

$$8. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$$

$$9. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C.$$

$$10. \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C.$$

三、第一换元法积分法（凑微分法）

设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$, $u = \varphi(x)$ 可导, 则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = \int f(u)du = F(u) + C = F[\varphi(x)] + C.$$

四、分部积分法

设函数 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 具有连续的导函数, 则有 $\int uv' dx = uv - \int vu' dx$,

即

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

第二节 定积分

一、牛顿-莱布尼茨公式

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$