

目 录

全国成人高等学校专升本招生统一考试高等数学(一)全真模拟试卷(一)	1
全国成人高等学校专升本招生统一考试高等数学(一)全真模拟试卷(二)	5
全国成人高等学校专升本招生统一考试高等数学(一)全真模拟试卷(三)	10
全国成人高等学校专升本招生统一考试高等数学(一)全真模拟试卷(四)	16
全国成人高等学校专升本招生统一考试高等数学(一)全真模拟试卷(五)	22
2018 年成人高等学校专升本招生全国统一考试真题	29
2019 年成人高等学校专升本招生全国统一考试真题	35
全国成人高等学校专升本招生统一考试高等数学(一)全真模拟试卷(一)参考答案	39
全国成人高等学校专升本招生统一考试高等数学(一)全真模拟试卷(二)参考答案	43
全国成人高等学校专升本招生统一考试高等数学(一)全真模拟试卷(三)参考答案	46
全国成人高等学校专升本招生统一考试高等数学(一)全真模拟试卷(四)参考答案	49
全国成人高等学校专升本招生统一考试高等数学(一)全真模拟试卷(五)参考答案	51
2018 年成人高等学校专升本招生全国统一考试真题参考答案	54
2019 年成人高等学校专升本招生全国统一考试真题参考答案	58

全国成人高等学校专升本招生统一考试

高等数学(一)全真模拟试卷(一)

答案必须答在答题卡上指定的位置,答在试卷上无效.

第 I 卷(选择题,共 40 分)

一、选择题(1 ~ 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时,下列变量是无穷小量的为 ()

A. $\frac{1}{x^2}$

B. 2^x

C. $\sin x$

D. $\ln(x + e)$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x =$ ()

A. e

B. e^{-1}

C. e^2

D. e^{-2}

3. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续,则常数 $a =$ ()

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

4. 设函数 $f(x) = x \ln x$, 则 $f'(e) =$ ()

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

5. 函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 的极小值为 ()

A. -2

B. 0

C. 2

D. 4

6. 方程 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ 表示的二次曲面是 ()

A. 圆锥面

B. 旋转抛物面

C. 球面

D. 椭球面

7. 若 $\int_0^1 (2x + k) dx = 1$ 则常数 $k =$ ()

A. -2

B. -1

C.0

D.1

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且 $f(x) > 0$, 则 ()

A. $\int_a^b f(x) dx > 0$

B. $\int_a^b f(x) dx < 0$

C. $\int_a^b f(x) dx = 0$

D. $\int_a^b f(x) dx$ 的符号无法确定

9. 空间直线 $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ 的方向向量可取为 ()

A. $(3, -1$

(2) B. $(1, -2, 3)$

C. $(1, 1, -1)$

D. $(1, -1, -1)$

10. 已知 a 为常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+a^2}$ ()

A. 发散

B. 条件收敛

C. 绝对收敛

D. 收敛性与 a 的取值有关

第 II 卷(非选择题, 共 110 分)

二、填空题(11 ~ 20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sin(x-2)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

12. 曲线 $y = \frac{x+1}{2x+1}$ 的水平渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

13. 若函数 $f(x)$ 满足 $f'(1) = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

14. 设函数 $f(x) = x - \frac{1}{x}$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

15. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

16. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

17. 已知曲线 $y = x^2 + x - 2$ 的切线 l 斜率为 3, 则 l 的方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

18. 设二元函数 $z = \ln(x^2 + y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

19. 设 $f(x)$ 为连续函数, 则 $\left(\int_0^x f(t) dt \right)' = \underline{\hspace{2cm}}.$

20. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ 的收敛半径为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题(21 ~ 28 题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

$$\text{求} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2}.$$

22. (本题满分 8 分)

$$\text{设} \begin{cases} x = 1 + t^2, \\ y = 1 + t^3, \end{cases} \text{求} \frac{dy}{dx}.$$

23. (本题满分 8 分)

已知 $\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,求 $\int x f'(x) dx$.

24. (本题满分 8 分)

$$\text{计算} \int_0^4 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx.$$

25. (本题满分 8 分)

设二元函数 $z = x^2 y^2 + x - y + 1$, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

26. (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

27. (本题满分 10 分)

求微分方程 $y \frac{dy}{dx} = x^2$ 的通解.

28. (本题满分 10 分)

用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形有盖桶, 证明当圆柱的高等于底面直径时, 所使用的铁皮面积最小.

全国成人高等学校专升本招生统一考试

高等数学(一) 全真模拟试卷(二)

题 号	一	二	三	总分
分 数				

考生注意:根据国标要求,试卷中正切函数、余切函数、反正切函数和反余切函数分别用 $\tan x$ 、 $\cot x$ 、 $\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

得分	评卷人

一、选择题:本大题共 10 个小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的
 - 充分条件
 - 必要条件
 - 充分且必要的条件
 - 既非充分也非必要
- 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 - \sin x$ 是 x 的
 - 高阶无穷小量
 - 等价无穷小量
 - 同阶无穷小量,但不是等价无穷小量
 - 低阶无穷小量
- 下列方程中是一阶线性微分方程的为
 - $xy' + y^2 = x$
 - $y' + xy = \sin x$
 - $yy' = x$
 - $y' + x = \cos y$
- 设函数 $f(x) = e^{2x-1}$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的二阶导数 $f''(0)$ 等于
 - 0
 - e^{-1}
 - $4e^{-1}$
 - e
- 设 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 则下列命题中正确的是
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 可能不存在
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 必定存在, 但不一定等于 $f(x_0)$
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 必定存在, 且等于 $f(x_0)$
 - $f(x_0)$ 在点 x_0 必定可导
- 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & x \neq 2 \\ a & x = 2 \end{cases}$ 为连续函数, 则 a 等于
 - 0
 - 1

C.2

D.任意值

7. 当 $x \rightarrow 0$ 时,下列变量是无穷小量的为

A. $\sin \frac{1}{x}$

B. $x \sin \frac{1}{x}$

C. $\frac{\sin x}{x}$

D. 2^x

8. 设 $y = \frac{1}{k} \arctan \frac{x}{k}$, 则 y' 为

A. $\frac{k}{k^2 + x^2}$

B. $\frac{x}{k^2 + x^2}$

C. $\frac{1}{k^2 + x^2}$

D. 以上都不对

9. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处有定义, 是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的

A. 必要条件

B. 充分条件

C. 充要条件

D. 无关条件

10. 下列极限正确的是

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = 1$

C. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$

得分	评卷人

二、填空题: 本大题共 10 个小题, 10 个空, 每空 4 分, 共 40 分. 把答案填在题中横线上.

11. $\iint_D e^{x+y} dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$, 其中 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.12. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{1 - \cos x}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.13. 已知 $f(x, x+y) = x^2 + xy$, 则 $\frac{\partial f}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$.14. $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.15. 微分方程 $y'' - 6y' + 9y = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.16. 函数 $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ 在 $\underline{\hspace{2cm}}$ 处间断.17. 设 $f(x) = \sin(\ln x)$, 求 $f''(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.18. $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.19. 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

20. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

得分	评卷人

三、解答题: 本题共 8 个小题, 共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤.

21. (本题满分 8 分)

计算不定积分 $\int \frac{1}{x(2x+1)} dx.$

22. (本题满分 10 分)

已知曲线 $x = \frac{1}{k}y^2 (k > 0)$ 与直线 $y = -x$ 所围图形的面积为 $\frac{9}{48}$, 试求 k 的值.

23. (本题满分 8 分)

已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \int_{-\infty}^a te^{2t} dt$, 求 a 的值.

24. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, 问常数 a, b, c 满足什么关系时, $f(x)$ 分别没有极值、可能有一个极值、可能有两个极值?

25. (本题满分 8 分)

设 $y = x^{\tan x}$, 求 y' .

26. (本题满分 10 分)

交换二重积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2} dx$ 的次序, 并计算之.

27. (本题满分 8 分)

设函数 $y = y(x)$ 由方程组 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon \sin y = 1 \end{cases}$ ($0 < \varepsilon < 1$) 确定, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

28. (本题满分 8 分)

求方程 $y'' + 2y' = 3e^{-2x}$ 的通解.

全国成人高等学校专升本招生统一考试

高等数学(一) 全真模拟试卷(三)

题 号	一	二	三	总分
分 数				

考生注意:根据国标要求,试卷中正切函数、余切函数、反正切函数和反余切函数分别用 $\tan x$ 、 $\cot x$ 、 $\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

得分	评卷人

一、选择题:本大题共 10 个小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. 设 $y = \sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$, 则 $\frac{dy}{dx}$ 等于

A. $\frac{y}{2} \left[\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)} \right]$

B. $\frac{y}{2} \left[\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} \right]$

C. $\frac{1}{2y} \cdot \frac{f'(x)}{g'(x)}$

D. $\frac{y}{2} \cdot \frac{f'(x)}{g'(x)}$

2. 下列函数在点 $x = 0$ 处不可导的是

A. $y = 3\sqrt{x}$

B. $y = \tan x$

C. $y = \arccos x$

D. $y = 2^x$

3. 满足微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$ 初始条件 $y \Big|_{x=1} = 0$ 的特解为

A. $\ln x$

B. $\frac{1}{x+1} \ln x$

C. $\frac{1}{x+1}$

D. $\frac{1}{x} \ln x$

4. 直线 l 与 x 轴平行, 且与曲线 $y = x - e^x$ 相切, 则切点的坐标是

A. $(1, 1)$

B. $(-1, 1)$

C. $(0, -1)$

D. $(0, 1)$

5. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = 3$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$

A. 绝对收敛

B. 条件收敛

C. 发散

D. 收敛性与 a_n 有关

6. 函数 $y = x^3 - 3x$ 的单调递减区间为

A. $(-\infty, -1]$

B. $[-1, 1]$

C. $[1, +\infty)$

D. $(-\infty, +\infty)$

7. 设 $f(x)$ 为连续函数, 则 $(\int_a^x f(t) dt)'$ 为

A. $f(t)$

B. $f(t) - f(a)$

C. $f(x)$

D. $f(x) - f(a)$

8. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $2x^2 + 3x$ 是 x 的

A. 高阶无穷小

B. 等价无穷小

C. 同阶无穷小, 但不是等价无穷小

D. 低阶无穷小

9. 设 $f(x)$ 在 x_0 处不连续, 则

A. $f'(x_0)$ 必存在B. $f'(x_0)$ 必不存在C. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 必存在D. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 必不存在

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, $f'(x) > 0$, 并且 $f(0) < 0, f(1) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内

A. 至少有两个零点

B. 有且仅有一个零点

C. 没有零点

D. 零点个数不能确定

得分	评卷人

二、填空题: 本大题共 10 个小题, 10 个空, 每空 4 分, 共 40 分. 把答案写在题中横线上.

11. $\int x \sqrt[3]{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

12. 设 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极值点, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

13. 设 $z = \sin(\frac{y}{x} + x^2)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

14. 设 $f(x+1) = 3x^2 + 2x + 1$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

15. 二阶常系数线性微分方程 $y'' - 4y' + 4y = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

16. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

17. 设 $\int_0^{+\infty} \frac{k}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}$, 且 k 为常数, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}.$

18. $\int_0^1 x e^{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

19. 设 $z = \ln(x^2 + \frac{x}{y})$, 则 $dz = \underline{\hspace{2cm}}.$

20. 设区域 D 由 y 轴, $y = x, y = 1$ 所围成, 则 $\iint_D x dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

得分	评卷人

三、解答题:本题共 8 个小题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤.

21. (本题满分 8 分)

设 $z = z(x, y)$ 由 $x^2 + y^3 + 3xyz^2 + 2z = 1$ 确定,求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

22. (本题满分 10 分)

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, $G(x)$ 为 $\frac{1}{f(x)}$ 的一个原函数,且 $F(x) \cdot G(x) = -1, f(0) = 1$, 求 $f(x)$.

23. (本题满分 8 分)

$$\text{求} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\int_0^x \sin t^2 dt}.$$

24. (本题满分 10 分)

$$\text{证明: } \int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

25. (本题满分 8 分)

已知 $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ 求 $t = \frac{\pi}{3}$ 时 $\frac{dy}{dx}$ 的值.

26. (本题满分 10 分)

计算 $\iint_D x dx dy$, 其中区域 D 满足 $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$.

27. (本题满分 8 分)

求 $\iint_D (x + y) dx dy$, 其中区域 D 是由曲线 $y = 1 + x^2, y = x^2, x = 0$ 与 $x = 1$ 所围成.

28. (本题满分 8 分)

求微分方程 $xy' - y = x^2$ 的通解.

全国成人高等学校专升本招生统一考试

高等数学(一) 全真模拟试卷(四)

题 号	一	二	三	总分
分 数				

考生注意:根据国标要求,试卷中正切函数、余切函数、反正切函数和反余切函数分别用 $\tan x$ 、 $\cot x$ 、 $\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

得分	评卷人

一、选择题:本大题共 10 个小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则下列级数收敛的是

A. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$

2. 设 $y = f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续,且 $f(0) > 0, f(1) < 0$,则下列选项正确的是

A. $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可能无界

B. $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上未必有最小值

C. $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上未必有最大值

D. 方程 $f(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个实根

3. 微分方程 $y'' = y'$ 的通解为

A. $y = c_1 x + c_2 e^x$

B. $y = c_1 + c_2 e^x$

C. $y = c_1 + c_2 x$

D. $y = c_1 x + c_2 x^2$

注: c_1, c_2 为任意常数.

4. 设 $f(x)$ 为连续函数,则 $\int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(a+b-x) dx$ 等于

A. 0

B. 1

C. $a+b$

D. $\int_a^b f(x) dx$

5. 下列命题错误的是

A. 若 $f(x) = e^{e^x+a}$, 则 $f'(x) = e^{e^x+a+x}$.

B. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

C. $f(x)$ 在 x_0 处可导, 在 x_0 处连续.

D. $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上也连续.

6. 下列不定积分正确的是

A. $\int x^2 dx = x^3 + C$

B. $\int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + C$

C. $\int \sin x dx = \cos x + C$

D. $\int \cos x dx = \sin x + C$

7. 设 $F(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \leq 1, \\ x, & 1 < x < 2, \\ 2x - 2, & x \geq 2. \end{cases}$ $f(x)$ 的极限不存在的点是

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

8. 若 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, 则

A. $f'(x_0)$ 必定存在, 且 $f'(x_0) = 0$

B. $f'(x_0)$ 必定存在, 但 $f'(x_0)$ 不一定等于零

C. $f'(x_0)$ 可能不存在

D. $f'(x_0)$ 必定不存在

9. 椭圆 $x^2 + 2y^2 = 27$ 上横坐标与纵坐标相等的点处的切线斜率为

A. -1

B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

10. 曲线 $y = x \sin \frac{1}{x}$

A. 仅有水平渐近线

B. 既有水平渐近线, 又有铅直渐近线

C. 仅有铅直渐近线

D. 既无水平渐近线, 又无铅直渐近线

得分	评卷人

二、填空题: 本大题共 10 个小题, 10 个空, 每空 4 分, 共 40 分. 把答案填在题中横线上.

11. 设 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, 则 $f(f(x)) =$ _____.

12. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} =$ _____.

13. 设 $y = f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 且 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极值点, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 _____.

14. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{x})^{bx+d} =$ _____.

15. 设 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 则 $\int f(\sin x) \cos x dx =$ _____.

16. 设函数 $z = xy + x^3$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

17. D 是由 x 轴, y 轴及直线 $x + y = 1$ 围成的三角形区域, 则 $\iint_D xy dx dy$ _____.

18. $y = \sin(e^{\frac{1}{x}})$, 则 $y' =$ _____.

19. 二元函数 $f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$ 的极值是_____.

20. 定积分 $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2 \sin x}{1 + x^2} dx =$ _____.

得分	评卷人

三、解答题: 本大题共 8 小题, 共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤.

21. (本题满分 8 分)

求微分方程 $y'' = x + \sin x$ 的通解.

22. (本题满分 10 分)

曲线 $y^2 + 2xy + 3 = 0$ 上哪点的切线与 x 轴正向所夹的角为 $\frac{\pi}{4}$?

23. (本题满分 8 分)

设 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x + a}{x - 2} = 5$, 求 a 的值.

24. (本题满分 10 分)

设区域 D 为: $x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0$, 计算 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$.

25. (本题满分 8 分)

求球面 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8y + 6z + 1 = 0$ 的球心和半径.

26. (本题满分 10 分)

计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1 + \cos^2 x} dx$.

27. (本题满分 8 分)

设 $\frac{d}{dx}f(x^2) = \frac{1}{x}$, 求 $f'(x)$.

28. (本题满分 8 分)

判定 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3 + n}}$ 的收敛性, 若其收敛, 判定其是绝对收敛, 还是条件收敛?

全国成人高等学校专升本招生统一考试

高等数学(一) 全真模拟试卷(五)

考生注意:根据国标要求,试卷中正切函数、余切函数、反正切函数和反余切函数分别用 $\tan x$ 、 $\cot x$ 、 $\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

得分	评卷人

一、选择题:本大题共 10 个小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. 在 $[-1, 1]$ 上满足罗尔中值定理的所有条件的函数是

A. $f(x) = \frac{1}{x}$

B. $f(x) = |x|$

C. $f(x) = x^2 - 1$

D. $f(x) = x + 1$

2. 下列极限存在的有

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x + 7}{(x - 1)^2}$

B. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x^2}$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x) \cos \frac{1}{x}$

3. 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶常系数线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的解,则它的通解为

A. $y_1(x) + c_2 y_2(x)$

B. $c_1 y_1(x) + y_2(x)$

C. $y_1(x) + y_2(x)$

D. $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

注: c_1, c_2 为任意常数.

4. 设 $\int_0^x f(t) dt = x \sin x$, 则 $f(x)$ 等于

A. $\sin x + x \cos x$

B. $\sin x - x \cos x$

C. $x \cos x - \sin x$

D. $-(\sin x + x \cos x)$

5. 曲线 $y = \frac{1}{x+1}$ 在点 $(1, \frac{1}{2})$ 处的切线方程是

A. $x + 4y - 3 = 0$

B. $4x + y - 3 = 0$

C. $x - 4y - 3 = 0$

D. $4x + 4y - 3 = 0$

6. 设函数 $y = f(x)$ 二阶可导, 且 $f'(x) < 0, f''(x) < 0$, 又 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, $dy = f'(x) \Delta x$, 则当 $\Delta x > 0$ 时, 有

A. $\Delta y > dy > 0$

B. $\Delta y < dy < 0$

C. $dy > \Delta y > 0$

D. $dy < \Delta y < 0$

7. $x = 0$ 是函数 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ 的

- A. 振荡间断点
B. 无穷间断点
C. 可去间断点
D. 跳跃间断点

8. 设 $z = \sin^2(ax + by)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 为

- A. $2a^2 \cos 2(ax + by)$
B. $2ab \cos 2(ax + by)$
C. $2b^2 \cos 2(ax + by)$
D. $2ab \sin 2(ax + by)$

9. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不存在, 则

- A. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ 都不存在
B. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ 都存在
C. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ 之中的一个存在
D. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)]$ 存在与否与 $f(x), g(x)$ 有关

10. 设 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$, 则 $x = 1$ 为 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的

- A. 极小值点, 但不是最小值点
B. 极小值点, 也是最小值点
C. 极大值点, 但不是最大值点
D. 极大值点, 也是最大值点

得分	评卷人

二、填空题: 本大题共 10 个小题, 10 个空, 每空 4 分, 共 40 分. 把答案填在题中横线上.

11. 对于微分方程 $y'' + y = \sin x$, 利用待定系数法求其特解 y^* 时, 其特解的设法是 $y^* =$ _____.

12. 函数 $f(x) = \ln \arcsin x$ 的连续区间是_____.

13. 设 $\int f(x) dx = x^2 + C$, 则 $\int xf(1 - x^2) dx =$ _____.

14. 设 $f(x) = \frac{ax - b}{cx - d}$, 则 $f(x)$ 的反函数是_____.

15. $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy =$ _____.

16. 设 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 与 $\frac{1}{x}$ 是等价无穷小, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} 2xf(x) =$ _____.

17. $\int_0^1 (x^2 + 1)^5 x dx =$ _____.

18. 设 $\phi(x) = \int_0^x t \cos^2 t dt$, 则 $\phi'(\frac{\pi}{4}) =$ _____.

19. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x-3)^n}{2n-1}$ 的收敛区间是_____. (不讨论端点)

20. 下列两个积分的大小关系是 $\int_1^2 \frac{\sin x}{x} dx$ _____ $\int_1^2 (\frac{\sin x}{x})^2 dx$. (填 $>$, $=$, $<$)

得分	评卷人

三、解答题:本题共 8 个小题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤.

21. (本题满分 8 分)

求微分方程 $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$ 的通解.

22. (本题满分 10 分)

欲围造一个面积为 15 000 平方米的运动场,其正面材料造价为每平方米 600 元,其余三面材料造价为每平方米 300 元,试问正面长为多少米才能使材料费最少?

23. (本题满分 8 分)

试证方程 $e^x - 2 = x$ 在区间 $(0, 2)$ 内至少有一个根.

24. (本题满分 10 分)

设 z 是由 $e^{x+z} + xz - y = 0$ 确定的隐函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

25. (本题满分 8 分)

将 $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数.

26. (本题满分 10 分)

计算 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx$.

27. (本题满分 8 分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases}$, 试确定 a, b 的值, 使 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处既连续又可导.

28. (本题满分 8 分)

求由方程 $y^3 = x^2 + xy + y^2$ 确定的隐函数的微分及导数.

2018 年成人高等学校专升本招生全国统一考试真题

第 I 卷(选择题,共 40 分)

一、选择题(1 ~ 10 小题,每小题 4 分,共 40 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} =$ 【 】

- A.e B.2 C.1 D.0

2. 若 $y = 1 + \cos x$, 则 $dy =$ 【 】

- A. $(1 + \sin x) dx$ B. $(1 - \sin x) dx$
C. $\sin x dx$ D. $-\sin x dx$

3. 若函数 $f(x) = 5^x$, 则 $f'(x) =$ 【 】

- A. 5^{x-1} B. $x5^{x-1}$
C. $5^x \ln 5$ D. 5^x

4. $\int \frac{1}{2-x} dx =$ 【 】

- A. $\ln |2-x| + C$ B. $-\ln |2-x| + C$
C. $-\frac{1}{(2-x)^2} + C$ D. $\frac{1}{(2-x)^2} + C$

5. $\int f'(2x) dx =$ 【 】

- A. $\frac{1}{2} f(2x) + C$ B. $f(2x) + C$
C. $2f(2x) + C$ D. $\frac{1}{2} f(x) + C$

6. 若 $f(x)$ 为连续的奇函数, 则 $\int_{-1}^1 f(x) dx =$ 【 】

- A.0 B.2 C. $2f(-1)$ D. $2f(1)$

7. 若二元函数 $z = x^2 y + 3x + 2y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ 【 】

- A. $2xy + 3 + 2y$ B. $xy + 3 + 2y$

C. $2xy + 3$

D. $xy + 3$

8. 方程 $x^2 + y^2 - 2z = 0$ 表示的二次曲面是

【 】

A. 柱面

B. 球面

C. 旋转抛物面

D. 椭球面

9. 已知区域 $D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, 则 $\iint_D x \, dx \, dy =$

【 】

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

10. 微分方程 $yy' = 1$ 的通解为

【 】

A. $y^2 = x + C$

B. $\frac{1}{2}y^2 = x + C$

C. $y^2 = Cx$

D. $2y^2 = x + C$

第 II 卷(非选择题, 共 110 分)

二、填空题(11 ~ 20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. 曲线 $y = x^3 - 6x^2 + 3x + 4$ 的拐点为_____.12. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x}} =$ _____.13. 若函数 $f(x) = x - \arctan x$, 则 $f'(x)$ _____.14. 若 $y = e^{2x}$, 则 dy _____.15. $\int (2x + 3) \, dx$ _____.16. $\int_{-1}^1 (x^5 + x^2) \, dx$ _____.17. $\int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} \, dx$ _____.18. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ _____.19. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx$ _____.20. 若二元函数 $z = x^2 y^2$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ _____.

三、解答题(21 ~ 28 题, 共 70 分, 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{3\sin x}{x}, & x < 0, \\ 3x + a, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 求 a .

22. (本题满分 8 分)

$$\text{求} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{\sin(x^2 - 1)}.$$

23. (本题满分 8 分)

设函数 $f(x) = 2x + \ln(3x + 2)$, 求 $f''(0)$.

24. (本题满分 8 分)

$$\text{求} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin 3t dt}{x^2}.$$

25. (本题满分 8 分)

$$\text{求} \int x \cos x dx.$$

26. (本题满分 10 分)

求函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5$ 的极值.

27. (本题满分 10 分)

求微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = 2\ln x$ 的通解.

28. (本题满分 10 分)

设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$, 计算 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$.

2019 年成人高等学校专升本招生全国统一考试真题

第 I 卷(选择题,共 40 分)

一、选择题(1 ~ 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 当 $r \rightarrow 0$ 时, $x + x^2 + x^3 + x^4$ 【 】

A. 等价无穷小

B. 2 阶无穷小

C. 3 阶无穷小

D. 4 阶无穷小

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x =$ 【 】

A. $-e^2$

B. $-e$

C. e

D. e^2

3. 设函数 $y = \cos 2x$, 则 $y' =$ 【 】

A. $2\sin 2x$

B. $-2\sin 2x$

C. $\sin 2x$

D. $-\sin 2x$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在可导, $f'(x) > 0$, $f(a)f(b) < 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内零点的个数为 【 】

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

5. 设 $2x$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f(x) =$ 【 】

A. 0

B. 2

C. x^2

D. $x^2 + C$

6. 设函数 $f(x) = \arctan x$, 则 $\int f'(x) dx =$ 【 】

A. $-\arctan x + C$

B. $-\frac{1}{1+x^2} + C$

C. $\arctan x + C$

D. $\frac{1}{1+x^2} + C$

7. 设 $I_1 = \int_0^1 x^2 dx$, $I_2 = \int_0^1 x^3 dx$, $I_3 = \int_0^1 x^4 dx$ 【 】

A. $I_1 > I_2 > I_3$

B. $I_2 > I_3 > I_1$

C. $I_3 > I_2 > I_1$

D. $I_1 > I_3 > I_2$

8. 设函数 $z = x^2 e^y$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} =$ 【 】

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

9. 平面 $x + 2y - 3z + 4 = 0$ 的一个法向量为 【 】

A. $\{1, -3, 4\}$

B. $\{1, 2, 4\}$

C. $\{1, 2, -3\}$

D. $\{2, -3, 4\}$

10. 微分方程 $yy' + (y')^3 + y^4 = x$ 的阶数为

【 】

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

第 II 卷(非选择题,共 110 分)

二、填空题(11 ~ 20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

12. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 5x, & x < 0, \\ a, & x \geq 0, \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处连续,则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

13. 设函数 $y = e^{2x}$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

14. 函数 $f(x) = x^3 - 12x$ 的极小值点 $x = \underline{\hspace{2cm}}.$

15. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

16. $\int_{-1}^1 x \tan^2 x \, dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

17. 设函数 $z = x^3 + y^2$, $dz = \underline{\hspace{2cm}}.$

18. 设函数 $z = x \arcsin y$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

19. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛半径为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

20. 微分方程 $y' = 2x$ 的通解: $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题(21 ~ 28 题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2kx}{x} = 2$, 求 k .

22. (本题满分 8 分)

设函数 $y = \sin(2x - 1)$, 求 y' .

23. (本题满分 8 分)

设函数 $y = x \ln x$, 求 y'' .

24. (本题满分 8 分)

计算 $\int (x^{\frac{1}{3}} + e^x) dx$.

25. (本题满分 8 分)

设函数 $z = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, 求 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y}$.

26. (本题满分 10 分)

$x = 1 - y^2$ 与 x 轴 y 轴, 在第一象限围成的有界区域, 求:

(1) D 的面积 S ;

(2) D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V .

27. (本题满分 10 分)

求微分方程 $y'' - 5y' - 6y = 0$ 的通解.

全国成人高等学校专升本招生统一考试

高等数学(一) 全真模拟试卷(一) 参考答案

一、选择题

1.【答案】C

【考情点拨】本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0$.

2.【答案】C

【考情点拨】本题考查了 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2} \cdot 2} = e^2$.

3.【答案】B

【考情点拨】本题考查了函数在一点处连续的知识点.

【应试指导】因为函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} e^{-x} = a = f(0) = \frac{1}{2}$.

4.【答案】D

【考情点拨】本题考查了导数的基本公式的知识点.

【应试指导】因为 $f'(x) = \ln x + x(\ln x)' = \ln x + 1$, 所以 $f'(e) = \ln e + 1 = 2$.

5.【答案】A

【考情点拨】本题考查了极小值的知识点.

【应试指导】因为 $f'(x) = 3x^2 - 3$, 令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 1$. 又 $f''(x) = 6x, f''(-1) = -6 < 0, f''(1) = 6 > 0$. 所以 $f(x)$ 在 $x_2 = 1$ 处取得极小值, 且极小值 $f(1) = 1 - 3 = -2$.

6.【答案】D

【考情点拨】本题考查了二次曲面的知识点.

【应试指导】可将原方程化为 $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1$, 所以原方程表示的是椭球面.

7.【答案】C 【考情点拨】本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^1 (2x + k) dx = (x^2 + kx) \Big|_0^1 = 1 + k = 1$, 所以 $k = 0$.

8.【答案】A

【考情点拨】本题考查了定积分性质的知识点.

【应试指导】若在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) > 0$, 则定积分的值为由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a, x = b$, $y = 0$ 所围成图形的面积, 所以 $\int_a^b f(x) dx > 0$.

9.【答案】A

【考情点拨】本题考查了直线方程的方向向量的知识点.

【应试指导】因为直线方程为 $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1}$ 所以其方向向量为 $(3, -1, 2)$

10. 【答案】B

【考情点拨】本题考查了级数的收敛性的知识点.

【应试指导】 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n = (-1)^n \frac{1}{n+a^2} \rightarrow 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n+a^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+a^2}$, 因为 $\frac{1}{n+a^2} \leq \frac{1}{n} > 0$ 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n+a^2} \right|$ 发散. 由莱布尼茨判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+a^2}$ 收敛. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+a^2}$ 条件收敛.

二、填空题

11. 【答案】1

【考情点拨】本题考查了 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sin(x-2)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2}} = 1$.

12. 【答案】 $y = \frac{1}{2}$

【考情点拨】本题考查了水平渐近线方程的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$, 所求曲线的水平渐近线方程为: $y = \frac{1}{2}$.

13. 【答案】1

【考情点拨】本题考查了一阶导数的知识点.

【应试指导】 $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

14. 【答案】 $1 + \frac{1}{x^2}$

【考情点拨】本题考查了一阶导数的性质的知识点.

【应试指导】因为 $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $f'(x) = x' - \left(\frac{1}{x}\right)' = 1 + \frac{1}{x^2}$.

15. 【答案】2

【考情点拨】本题考查了函数的定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$.

16.【答案】 $\frac{\pi}{2}$

【考情点拨】本题考查了反常积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$

17.【答案】 $3x-y-3=0$

【考情点拨】本题考查了切线的知识点.

【应试指导】曲线上某一点的切线斜率为 $k = y' = 2x + 1$, 因为该切线的斜率为 3, 即 $k = 2x + 1 = 3$, $x = 1$, $y \Big|_{x=1} = 0$, 即切线过点 $(1, 0)$, 所求切线为 $y = 3(x - 1)$, 即 $3x - y - 3 = 0$.

18.【答案】 $\frac{2x}{x^2+y}$

【考情点拨】本题考查了二元函数偏导数的知识点.

【应试指导】 $z = \ln(x^2 + y)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x^2)'}{x^2+y} = \frac{2x}{x^2+y}.$

19.【答案】 $f(x)$ 【考情点拨】本题考查了导数的原函数的知识点.

【应试指导】 $\left(\int_0^x f(t) dt\right)' = f(x).$

20.【答案】3

【考情点拨】本题考查了幂级数的收敛半径的知识点.

【应试指导】 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}$, 故幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ 的收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho} = 3$.

三、解答题

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{2}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

$$22. \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{3t^2}{2t}$$

$$= \frac{3}{2}t.$$

$$23. \text{ 因为 } \sin x \text{ 是 } f(x) \text{ 的一个原函数, 所以 } \int x f'(x) dx = x f(x) - \int f(x) dx$$

$$= x f(x) - \sin x + C.$$

$$24. \text{ 设 } \sqrt{x} = t, \text{ 则 } x = t^2, dx = 2t dt, 0 \leq t \leq 2.$$

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = \int_0^2 \frac{2t}{1+t} dt$$

$$= 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt$$

$$= 2 \left[t \Big|_0^2 - \ln(1+t) \Big|_0^2 \right]$$

$$= 2 \times (2 - \ln 3)$$

$$= 4 - 2\ln 3.$$

25. 因为 $z = x^2 y^2 + x - y + 1$, 所以 $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 y - 1$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 + 1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy.$$

26. D 可表示为 $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2$.

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_D r \cdot r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 dr$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^2$$

$$= \frac{16}{3} \pi.$$

27. $y \frac{dy}{dx} = x^2,$

$$y dy = x^2 dx,$$

两边同时积分, $\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{3} x^3 + C_1,$

$$3y^2 = 2x^3 + C_1.$$

$$\text{即 } y^2 = \frac{2}{3} x^3 + C.$$

28. 设圆柱形的底面半径为 r , 高为 h , 则 $V = \pi r^2 h$. 所用铁皮面积 $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$,

$$\text{令 } \frac{dS}{dr} = 4\pi r - 2\pi h = 0,$$

$$2r = h.$$

$$\frac{d^2 S}{dr^2} = 4\pi > 0.$$

于是由实际问题得, S 存在最小值, 即当圆柱的高等于底面直径时, 所使用的铁皮面积最小.

全国成人高等学校专升本招生统一考试

高等数学(一) 全真模拟试卷(二) 参考答案

一、选择题

1. B 2. C 3. B 4. C 5. C 6. B 7. B 8. C 9. D 10. C

二、填空题

11. $(e-1)^2$ 12. $-\ln 2$ 13. y 14. $\frac{1}{2}$
 15. $e^{3x}(c_1 + c_2x)$ 16. 0 17. $-\frac{1}{x^2}[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$ 18. $\frac{1}{2}$
 19. $(1+x)^2$ 20. 2

三、解答题

$$\begin{aligned} 21. \text{ 解 } \int \frac{1}{x(2x+1)} dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{2x+1} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{2}{2x+1} dx \\ &= \ln x - \ln(2x+1) + C \end{aligned}$$

$$\text{或} \quad = \ln \frac{x}{2x+1} + C$$

注 上面两个积分对 1 个给 2 分. 丢常数 C 只扣 1 分.

22. 解 如图所示

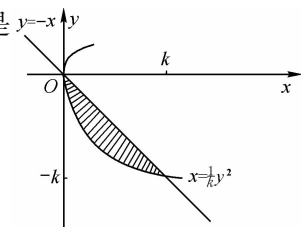
由于在曲线方程中 y 的幂次高, 选择 y 为积分变量, 于是

$$\begin{aligned} S &= \int_{-k}^0 \left(-y - \frac{1}{k}y^2 \right) dy \\ &= \left[-\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3} \frac{1}{k}y^3 \right] \Big|_{-k}^0 \\ &= \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{3}k^2 = \frac{9}{48} \end{aligned}$$

$$\text{即 } \frac{1}{6}k^2 = \frac{9}{48}$$

$$\text{解得 } k^2 = \frac{9}{8}, k = \pm \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{因为 } k > 0, \text{ 故 } k = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$



23. 解 左端:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{2a}{x-a} \right)^{\frac{x-a}{2a}} \right]^{\frac{2a}{x-a}} = e^{2a},$$

右端:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^a t e^{2t} dt &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^a t d e^{2t} = \frac{1}{2} e^{2t} \left(t - \frac{1}{2} \right) \Big|_{-\infty}^a \\ &= \frac{1}{2} e^{2a} \left(a - \frac{1}{2} \right) - \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^{2t}}{2} \left(t - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{2a} \left(a - \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

$$\text{从而 } e^{2a} = \frac{1}{2} e^{2a} \left(a - \frac{1}{2} \right), \text{ 解得 } a = \frac{5}{2}.$$

24. 解 此函数在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 处处可导, 因此, 它的极值点必是驻点即导数等于零的点: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, 令 $f'(x) = 0$. 即 $3ax^2 + 2bx + c = 0$

由一元二次方程根的判别式知:

当 $\Delta = (2b)^2 - 4 \cdot 3a \cdot c = 4(b^2 - 3ac) < 0$ 时, $f'(x) = 0$ 无实根. 由此知, 当 $b^2 - 3ac < 0$ 时, $f(x)$ 无极值.

当 $\Delta = 4(b^2 - 3ac) = 0$ 时, $f'(x) = 0$ 有一个实根. 由此可知, 当 $b^2 - 3ac = 0$ 时 $f(x)$ 可能有一个极值.

当 $\Delta = 4(b^2 - 3ac) > 0$ 时, $f(x)$ 可能有两个极值.

25. 解 将函数表达式两端取对数

$$\ln y = \tan x \cdot \ln x$$

两端关于 x 求导数

$$\frac{1}{y} y' = (\tan x)' \cdot \ln x + \tan x \cdot (\ln x)' = \frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{x},$$

$$y' = x^{\tan x} \left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{x} \right).$$

26. 解 由 $\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2} dx$ 可知积分区域 D 的不等式表达式为 $D: 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2} dx &= \int_0^1 dx \int_0^x e^{-x^2} dy \\ &= \int_0^1 e^{-x^2} y \Big|_0^x dx \\ &= \int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x^2} d(-x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2}e^{-x^2} \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{2}(1 - e^{-1})
 \end{aligned}$$

27. 解 方程组两端分别对 t 求导, 得

$$\begin{cases} x'_t = 2t + 2, \\ 2t - y'_t + \varepsilon \cos y \cdot y'_t = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } x'_t = 2(t+1), y'_t = \frac{2t}{1 - \varepsilon \cos y}, \quad \textcircled{1}$$

$$\text{故 } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t}{(t+1)(1 - \varepsilon \cos y)}$$

$$\begin{aligned}
 \text{而 } \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\frac{d(\frac{dy}{dt})}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d\left[\frac{t}{(t+1)(1 - \varepsilon \cos y)}\right]}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\
 &= \frac{(1 - \varepsilon \cos y) - t(t+1) \cdot \varepsilon \sin y \cdot y'_t}{(t+1)^2(1 - \varepsilon \cos y)^2} \cdot \frac{1}{2(t+1)}
 \end{aligned}$$

将 ① 式的 y'_t 代入上式, 得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1 - \varepsilon \cos y)^2 - 2\varepsilon t^2(t+1) \sin y}{2(t+1)^3(1 - \varepsilon \cos y)^3}$$

28. 解 对应齐次方程的特征方程为 $r^2 + 2r = 0$. 解得 $r = 0, -2$. 因此, 对应齐次方程的通解为

$$r = c_1 + c_2 e^{-2x}$$

由于原方程的自由项中, -2 是特征方程的单根, 故设原方程的一个特解为 $y^* =$

Axe^{-2x} , 代入所给方程, 并消去 e^{-2x} , 得 $A = -\frac{3}{2}$, 于是

$$y^* = -\frac{3}{2}xe^{-2x}$$

从而原方程的通解为

$$y = y^* + r = -\frac{3}{2}xe^{-2x} + c_1 + c_2 e^{-2x}$$

全国成人高等学校专升本招生统一考试

高等数学(一) 全真模拟试卷(三) 参考答案

一、选择题

1. A 2. A 3. D 4. C 5. A 6. B 7. C 8. C 9. B 10. B

二、填空题

11. $\frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+c$ 12. $y=f(0)$ 13. $(2x-\frac{y}{x^2})\cos(\frac{y}{x}+x^2)$
14. $3x^2-4x+2$ 15. $y=(c_1+c_2x)e^{2x}$ 16. 0
17. $\frac{1}{\pi}$ 18. $\frac{1}{2}(e-1)$ 19. $\frac{y}{x^2y+x}[(2x+\frac{1}{y})dx-\frac{x}{y^2}dy]$
20. $\frac{1}{6}$

三、解答题

21. 解 将所给方程两端关于 x 求偏导数, 可得

$$2x + 3y(z^2 + 2xz \frac{\partial z}{\partial x}) + 2 \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

可解得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x + 3yz^2}{2(3xyz + 1)}.$$

将所给方程两端关于 y 求偏导数, 可得

$$3y^2 + 3x(z^2 + 2yz \frac{\partial z}{\partial y}) + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

可解得 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3(y^2 + xz^2)}{2(3xyz + 1)}.$

22. 解 由题设可知

$$F'(x) = f(x),$$

$$G'(x) = \frac{1}{f(x)},$$

由于 $G(x) = -\frac{1}{F(x)}$, 可得

$$G'(x) = \frac{1}{F^2(x)} \cdot F'(x).$$

因此 $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{F^2(x)} \cdot f(x),$

$$F(x) = \pm f(x).$$

23. 解 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

24. 解 令 $x = \pi - t$, 则

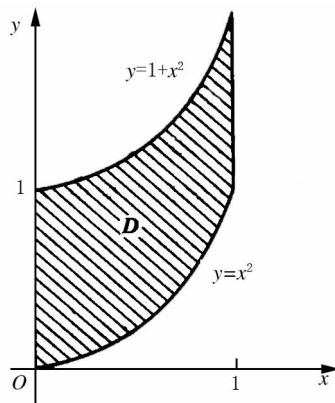
$$f(\sin x) = f(\sin(\pi - t)) = f(\sin t).$$

当 $x = 0$ 时, $t = \pi$; $x = \pi$ 时, $t = 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x f(\sin x) dx &= - \int_\pi^0 (\pi - t) f(\sin t) dt \\ &= \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin t) dt \\ &= \pi \int_0^\pi f(\sin t) dt - \int_0^\pi t f(\sin t) dt \end{aligned}$$

由于 $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \int_0^\pi t f(\sin t) dt$,

可得 $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx.$



25. 解 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e' \cos t - e' \sin t}{e' \sin t + e' \cos t}$

$$= \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}$$

故 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3}}$

$$= \sqrt{3} - 2.$$

26. 解 利用直角坐标系可将 D 表示为: $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$,

$$\begin{aligned} \iint_D x dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \Big|_0^{\sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - y^2) dy \\ &= \frac{1}{2} \left(y - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

27. 解 积分区域 D 如右图所示.

D 可以表示为

$$0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1 + x^2.$$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{1+x^2} (x+y) dy \\ &= \int_0^1 \left(xy + \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_{x^2}^{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(x + x^2 + \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{x}{2} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

28. 解 将方程化为标准形式

$$y' - \frac{1}{x}y = x.$$

$$\begin{aligned}y &= e^{-\int p dx} \left(\int q e^{\int p dx} dx + c \right) \\ &= e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int x e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + c \right) \\ &= e^{\ln x} \left(\int x e^{-\ln x} dx + c \right) \\ &= x \left(\int x \cdot \frac{1}{x} dx + c \right) \\ &= x(x + c).\end{aligned}$$

两端对 x 求导, 可得 $f(x) = F'(x) = \pm f'(x)$,

得到两个一阶微分方程

$$f'(x) - f(x) = 0,$$

$$f'(x) + f(x) = 0,$$

可解得 $f(x) = c_1 e^x$;

$$f(x) = c_2 e^{-x}.$$

由 $f(0) = 1$, 可得 $c_1 = c_2 = 1$,

故 $f(x) = e^x$ 或 $f(x) = e^{-x}$.

全国成人高等学校专升本招生统一考试

高等数学(一) 全真模拟试卷(四) 参考答案

一、选择题

1. C 2. D 3. B 4. A 5. D 6. D 7. A 8. C 9. B 10. A

二、填空题

11. $-\frac{1}{x}$ 12. $+\infty$ (发散) 13. $y=f(0)$ 14. e^{ab}
15. $F(\sin x) + C$ 16. $y + 3x^2 + x$ 17. $\frac{1}{24}$ 18. $-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\cos(e^{\frac{1}{x}})$
19. 极大值为 8 20. 0

三、解答题

21. 解 $y' = \int y'' dx = \int (x + \sin x) dx$
$$= \frac{1}{2}x^2 - \cos x + c_1,$$

$$y = \int y' dx = \int \left(\frac{1}{2}x^2 - \cos x + c_1 \right) dx$$
$$= \frac{1}{6}x^3 - \sin x + c_1x + c_2.$$

注:丢掉一个常数扣 1 分. 丢掉 c_1, c_2 共扣 2 分.

22. 解 将 $y^2 + 2xy + 3 = 0$ 对 x 求导, 得

$$2yy' + 2(y + xy') = 0$$
$$y' = -\frac{y}{x+y}$$

欲使切线与 x 轴正向所夹的角为 $\frac{\pi}{4}$, 只要切线的斜率为 1, 即

$$-\frac{y}{x+y} = 1,$$

亦即 $x + 2y = 0,$

设切点为 (x_0, y_0) , 则

$$x_0 + 2y_0 = 0 \quad \text{①}$$

又切点在曲线上, 即

$$y_0^2 + 2x_0y_0 + 3 = 0 \quad \text{②}$$

由 ①, ② 得 $y_0 = \pm 1, x_0 = \mp 2$

即曲线上点 $(-2, 1), (2, -1)$ 的切线与 x 轴正向所夹的角为 $\frac{\pi}{4}$.

23. 解 由于所给极限存在, 且分母的极限 $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$, 可知分子的极限为 0, 即

$$0 = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x + a) = 6 + a,$$

从而 $a = -6$.

24. 解 利用极坐标, 区域 D 可以表示为

$$0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 2,$$

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \int_0^\pi d\theta \int_0^2 r^2 dr \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^2 d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{8}{3} d\theta = \frac{8}{3} \pi. \end{aligned}$$

25. 解 因 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8y + 6z + 1 = (x+1)^2 + (y-4)^2 + (z+3)^2 - 25 = 0$,

$$\text{故 } (x+1)^2 + (y-4)^2 + (z+3)^2 = 5^2$$

所以球心坐标 $(-1, 4, -3)$, 半径为 5.

26. 解 原式 $= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \cos^2 x} d\cos x$

$$= - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(1 + \cos^2 x)}{1 + \cos^2 x}$$

$$= - \frac{1}{2} \ln(1 + \cos^2 x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2.$$

27. 解 令 $u = x^2$, 则 $f(x^2) = f(u)$.

$$\frac{d}{dx} f(x^2) = \frac{df(u)}{du} = \frac{df(u)}{du} \frac{du}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot 2x,$$

$$\text{由题设而得 } \frac{df(u)}{du} = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2u},$$

$$\text{从而有 } f'(x) = \frac{1}{2x}.$$

28. 解 记 $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3 + n}}, n = 1, 2, \dots$, 则 $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n^3 + n}}$.

$$\text{令 } v_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, n = 1, 2, \dots,$$

$$\text{由于 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n|}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n^3 + n}} = 1.$$

$$\text{且 } \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \text{ 收敛,}$$

$$\text{可知 } \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + n}} \text{ 收敛.}$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3 + n}}$ 绝对收敛.

全国成人高等学校专升本招生统一考试

高等数学(一) 全真模拟试卷(五) 参考答案

一、选择题

1. C 2. D 3. D 4. A 5. A 6. B 7. C 8. B 9. A 10. B

二、填空题

11. $x(asinx + bcosx)$ 12. $(0, 1]$

13. $-\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + c$ 或 $x^2 - \frac{x^4}{2} + c$

14. $\frac{dx-b}{cx-a}$ 15. $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e^4})$

16. 2 17. $\frac{63}{12}$ 18. $\frac{\pi}{8}$ 19. $(1, 2)$ 20. $>$

三、解答题

21. 解 相应的齐次微分方程为

$$y'' - y' - 2y = 0,$$

其特征方程为 $r^2 - r - 2 = 0$.

其特征根为 $r_1 = -1, r_2 = 2$,

齐次方程的通解 $Y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$.

由于 $f(x) = 3e^{2x}$, 2 为其特征根, 设非齐次方程的特解为

$$y^* = Axe^{2x},$$

代入原方程可得

$$A = 1,$$

$$y^* = xe^{2x}$$

原方程的通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + xe^{2x}$$

22. 解 设运动场正面围墙长为 x 米, 则宽为 $\frac{15\,000}{x}$. 设四面围墙高相同, 记为 h . 则四面围墙所用材料费用 $f(x)$ 为

$$f(x) = 600xh + 300xh + 2(300 \cdot \frac{15\,000}{x}h)$$

$$= 900xh + \frac{9\,000\,000}{x}h$$

$$f'(x) = 900h - \frac{9\,000\,000}{x^2}h$$

令 $f'(x) = 0$ 得驻点 $x_1 = 100, x_2 = -100$ (舍掉).

$$f''(x) = \frac{18\,000\,000}{x^3}h$$

$$f''(100) > 0$$

由于驻点唯一,且实际问题中存在最小值,可知 $x = 100$ 米,侧面长 150 米时,所用材料费最小.

23. 解 令 $f(x) = e^x - 2 - x$, 则 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 且 $f(0) = e^0 - 2 - 0 = -1 < 0$, $f(2) = e^2 - 2 - 2 = e^2 - 4 > 0$.

由介值定理知, 在 $(0, 2)$ 内至少存在一点 ε , 使 $f(\varepsilon) = 0$, 即 $e^\varepsilon - 2 = \varepsilon$, 也就是说方程 $e^x - 2 = x$ 在区间 $(0, 2)$ 内至少有一个根.

24. 解 设 $z = z(x, y)$ 是上述方程确定的隐函数, 故有恒等式:

$$e^{x+z(x,y)} + xz(x,y) - y = 0.$$

分别对 x 和 y 求偏导数得

$$e^{x+z} \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x} \right) + z + x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$e^{x+z} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) + x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0,$$

故
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z + e^{x+z}}{x + e^{x+z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x + e^{x+z}}$$

而
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x + e^{x+z}} \right) \\ &= \frac{-1 - e^{x+z} \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x} \right)}{(x + e^{x+z})^2} \\ &= \frac{-x - e^{x+z}(1 + x - z)}{(x + e^{x+z})^3} \end{aligned}$$

25. 解 $f'(x) = \left(\arctan \frac{1+x}{1-x} \right)'$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, (-1 < x < 1)$$

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^x f'(x) dx \\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \end{aligned}$$

$$f(0) = \frac{\pi}{4}, f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad -1 < x < 1.$$

26. 证 令 $t = \sqrt{e^x - 1}$, 则 $t^2 = e^x - 1, x = \ln(1 + t^2), dx = \frac{2t}{1 + t^2} dt$.

当 $x = 0$ 时, $t = 0$; $x = \ln 2$ 时, $t = 1$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx &= \int_0^1 t \frac{2t}{1 + t^2} dt \\ &= 2 \int_0^1 \frac{t^2}{1 + t^2} dx = 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + t^2}\right) dt \\ &= 2[t - \arctan t]_0^1 = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

27. 解 $f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1,$
 $f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b,$
 因 $f(x)$ 在 $x = 1$ 连续, $f(1-0) = f(1+0),$
 故 $a + b = 1, b = 1 - a.$

$$\begin{aligned} \text{又 } f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x - 1)}{x - 1} = a, \end{aligned}$$

要使 $f(x)$ 在 $x = 1$ 可导, 必须 $f'_-(1) = f'_+(1)$

故 $a = 2$. 于是 $b = 1 - a, b = -1$.

所以, 当 $a = 2, b = -1$ 时, 函数 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处既连续又可导.

28. 解 等式两边求微分:

$$3y^2 dy = 2x dx + y dx + x dy + 2y dy$$

得 $dy = \frac{2x + y}{3y^2 - x - 2y} dx$

从而得 $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{3y^2 - x - 2y}.$

2018 年成人高等学校专升本招生全国统一考试真题参考答案

一、选择题

1.【答案】D

【考情点拨】本题考查了极限的运算的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = \frac{0}{1} = 0.$

2.【答案】D

【考情点拨】本题考查了一元函数的微分的知识点.

【应试指导】 $y' = (1 + \cos x)' = -\sin x$, 故 $dy = -\sin x dx$.

3.【答案】C

【考情点拨】本题考查了导数的基本公式的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = (5^x)' = 5^x \ln 5.$

4.【答案】B

【考情点拨】本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{1}{2-x} dx = -\ln |2-x| + C.$

5.【答案】A

【考情点拨】本题考查了导数的原函数的知识点.

【应试指导】 $\int f'(2x) dx = \frac{1}{2} \int f'(2x) d(2x) = \frac{1}{2} f(2x) + C.$

6.【答案】A

【考情点拨】本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】因为 $f(x)$ 是连续的奇函数, 故 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0.$

7.【答案】C

【考情点拨】本题考查了一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $z = x^2 y + 3x + 2y$, 故 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 3.$

8.【答案】C

【考情点拨】本题考查了二次曲面的知识点.

【应试指导】 $x^2 + y^2 - 2z = 0$ 可化为 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = z$, 故表示的是旋转抛物面.

9.【答案】A

【考情点拨】本题考查了二重积分的知识点.

【应试指导】 $\iint_D x dx dy = \int_{-1}^1 x dx \int_{-1}^1 dy = 2 \int_{-1}^1 x dx = 0.$

10.【答案】B

【考情点拨】 本题考查了微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 原方程分离变量得 $ydy = dx$, 两边同时积分得 $\frac{1}{2}y^2 = x + C$, 故方程的通解为 $\frac{1}{2}y^2 = x + C$.

二、填空题

11. 【答案】 $(2, -6)$

【考情点拨】 本题考查了拐点的知识点.

【应试指导】 $y' = 3x^2 - 12x + 3, y'' = 6x - 12$, 令 $y'' = 0$, 则 $x = 2, y = -6$, 故拐点为 $(2, -6)$.

12. 【答案】 e^{-3}

【考情点拨】 本题考查了 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1+(-3x)]^{\frac{1}{-3x} \cdot (-3)} = e^{-3}$.

13. 【答案】 $\frac{x^2}{1+x^2}$

【考情点拨】 本题考查了导数的求导公式的知识点.

【应试指导】 $f(x) = x - \arctan x$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$.

14. 【答案】 $2e^{2x} dx$

【考情点拨】 本题考查了复合函数求导的知识点.

【应试指导】 $y' = (e^{2x})' = 2e^{2x}$, 则 $dy = 2e^{2x} dx$.

15. 【答案】 $x^2 + 3x + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int (2x+3) dx = x^2 + 3x + C$.

16. 【答案】 $\frac{2}{3}$

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_{-1}^1 (x^5 + x^2) dx = \left(\frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$.

17. 【答案】 2

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx = 2 \int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) = -2 \cos \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} = 2$.

18. 【答案】 $\frac{3}{2}$

【考情点拨】 本题考查了幂级数求和的知识点.

【应试指导】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2}$.

19. 【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了无穷积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1.$

20. 【答案】 $4xy$

【考情点拨】 本题考查了高阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $z = x^2 y^2, \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy.$

三、解答题

21. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3\sin x}{x} = 3,$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x + a) = a,$

且 $f(0) = a,$

$\therefore f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0),$

$\therefore a = 3.$

22. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{\sin(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x^2 + x + 1)(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x + 1}{x + 1}$
 $= \frac{5}{2}.$

23. $f'(x) = 2 + \frac{3}{3x + 2},$

$f''(x) = -\frac{9}{(3x + 2)^2},$

故 $f''(0) = -\frac{9}{4}.$

24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin 3t dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3} \cos 3t \Big|_0^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}(1 - \cos 3x)}{x^2}$
 $= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{9}{2} x^2}{x^2}$
 $= \frac{3}{2}.$

25. $\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx$
 $= x \sin x + \cos x + C.$

26. $f'(x) = x^2 - x$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = 0, x_2 = 1$ 当 $x < 0$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 此时 $f(x)$ 调增加函数.

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 此时 $f(x)$ 为单调减少函数.

故当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取极大值, 极大值 $f(0) = 5$;

当 $x = 1$ 时, $f(x)$ 取极小值, 极小值 $f(1) = \frac{29}{6}$.

27. 这是个一阶线性非齐次微分方程.

$$P(x) = -\frac{1}{x}, Q(x) = 2\ln x,$$

$$\text{故通解为 } y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int 2\ln x e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right)$$

$$= x \cdot \left(2 \int \frac{\ln x}{x} dx + C \right)$$

$$= x[(\ln x)^2 + C].$$

28. D 在极坐标系里可表示为 $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 3$,

$$\text{故 } \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^\pi d\theta \int_0^3 r^2 \cdot r dr$$

$$= \frac{81}{4} \pi.$$

2019 年成人高等学校专升本招生全国统一考试真题参考答案

一、选择题

1.【答案】A

【考情点拨】本题考查了等价无穷小的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 + x^3 + x^4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + x^2 + x^3) = 1$, 故 $x + x^2 + x^3 + x^4$ 是 x 的等

价无穷小.

2.【答案】D

【考情点拨】本题考查了两个重要极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^{\frac{x}{2} \cdot 2} = [\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^{\frac{x}{2}}]^2 = e^2$.

3.【答案】B

【考情点拨】本题考查了复合函数的导数的知识点.

【应试指导】 $y' = (\cos 2x)' = -\sin 2x \cdot (2x)' = -2\sin 2x$.

4.【答案】C

【考情点拨】本题考查了零点存在定理的知识点.

【应试指导】由零点存在定理可知, $f(x)$ 在 (a, b) 上必有零点, 且函数是单调函数, 故其在 (a, b) 上只有一个零点.

5.【答案】B

【考情点拨】本题考查了函数的原函数的知识点.

【应试指导】由题可知 $\int f(x) dx = 2x + C$, 故 $f(x) = (\int f(x) dx)' = (2x + C)' = 2$.

6.【答案】C

【考情点拨】本题考查了不定积分的性质的知识点.

【应试指导】 $\int f'(x) dx = f(x) + C = \arctan x + C$.

7.【答案】A

【考情点拨】本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】在区间 $(0, 1)$ 内, 有 $x^2 > x^3 > x^4$, 由积分的性质可知

$$\int_0^1 x^2 dx > \int_0^1 x^3 dx > \int_0^1 x^4 dx, \text{ 即 } I_1 > I_2 > I_3$$

8.【答案】D

【考情点拨】本题考查了二元函数的偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^y$, 故 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,0)} = 2 \times 1 \times 1 = 2$.

9.【答案】C

【考情点拨】本题考查了平面的法向量的知识点.

【应试指导】平面的法向量即平面方程的系数 $\{1, 2, -3\}$.

10. 【答案】B

【考情点拨】本题考查了微分方程的阶的知识点.

【应试指导】微分方程中导数的最高阶数称为微分方程的阶, 本题最高是 2 阶导数, 故本题阶数为 2.

二、填空题

11. 【答案】2

【考情点拨】本题考查了等价无穷小的代换定理的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2.$

12. 【答案】0

【考情点拨】本题考查了函数的连续性的知识点.

【应试指导】由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 故有 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 5x = 0 = f(0) = a.$

13. 【答案】

$$2e^{2x} dx$$

【考情点拨】本题考查了复合函数的微分的知识点.

【应试指导】 $dy = d(e^{2x}) = e^{2x} \cdot (2x)' dx = 2e^{2x} dx.$

14. 【答案】2

【考情点拨】本题考查了函数的极值的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$, 当 $x = 2$ 或 $x = -2$ 时, $f'(x) = 0$, 当 $x < -2$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $-2 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$, 因此 $x = 2$ 是极小值点.

15. 【答案】 $\arcsin x + C$

【考情点拨】本题考查了不定积分的计算的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C.$

16. 【答案】0

【考情点拨】本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】被积函数 $x \tan^2 x$ 在对称区间 $[-1, 1]$ 上是奇函数, 故 $\int_{-1}^1 x \tan^2 x dx = 0.$

17. 【答案】 $3x^2 dx + 2y dy$

【考情点拨】本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2, \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$, 所以 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 3x^2 dx + 2y dy.$

18. 【答案】0

【考情点拨】本题考查了二阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = \arcsin y, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$

19. 【答案】1

【考情点拨】 本题考查了收敛半径的知识点.

【应试指导】 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$, 设 $a_n = n$, 则有 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$, 故其收敛半径为

$$R = \frac{1}{\rho} = 1.$$

20. 【答案】 $x^2 + C$

【考情点拨】 本题考查了可分离变量的微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 微分方程 $y' = 2x$ 是可分离变量的微分方程, 两边同时积分得

$$\int y' dx = \int 2x dx \Rightarrow y = x^2 + C.$$

三、解答题

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + 2k = 1 + 2k = 2,$$

$$\text{故 } k = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} 22. y' &= [\sin(2x-1)]' \\ &= \cos(2x-1) \cdot (2x-1)' \\ &= 2\cos(2x-1). \end{aligned}$$

$$23. y' = (x)' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + 1,$$

$$\text{故 } y'' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$\begin{aligned} 24. \int (x^{\frac{1}{3}} + e^x) dx &= \int x^{\frac{1}{3}} dx + \int e^x dx \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} x^{1 + \frac{1}{3}} + e^x + C \\ &= \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + e^x + C. \end{aligned}$$

$$25. \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y^2}, \text{ 故}$$

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{x^2} \cdot x^2 + y^2 \cdot \frac{1}{y^2}$$

$$= -1 + 1 = 0.$$

26. (1) 积分区域 D 可表示为: $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - y^2$,

$$S = \int_0^1 (1 - y^2) dy$$

$$= \left(y - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}.$$

$$(2) \quad V = \int_0^1 \pi y^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 (1-x) dx$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

27. 特征方程 $r^2 - 5r - 6 = 0$, 解得 $r_1 = -1$ 或 $r_2 = 6$, 故微分方程的通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{6x}$ (C_1, C_2 为任意常数).

28. 积分区域用极坐标可表示为: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 1$,

$$\text{所以 } I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r dr$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{16}.$$