



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(一)

全真模拟(一)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间150分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得分	评卷人

一、选择题(1~10小题,每小题4分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时,下列变量中为无穷小的是

- A. $\lg|x|$ B. $\sin \frac{1}{x}$
C. $\cot x$ D. $\sqrt{1+x}-1$

2. 下列等式成立的是

- A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} = 1$ B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = 1$
C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{2x} = 1$

3. 设函数 $f(x) = 2\ln x + e^x$, 则 $f'(2)$ 等于

- A. e B. 1
C. $1+e^2$ D. $\ln 2$

4. 设函数 $f(x) = (1+x)e^x$, 则函数 $f(x)$

- A. 有极小值 B. 有极大值
C. 既有极小值又有极大值 D. 无极值

5. $\int_{-1}^1 x^4 dx =$

- A. $\frac{2}{5}$ B. 0
C. $-\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{2}$

6. 下列各式中正确的是

- A. $\int_0^1 x^3 dx > \int_0^1 x^2 dx$ B. $\int_1^2 \ln x dx > \int_1^2 (\ln x)^2 dx$
C. $\frac{d}{dx} \int_a^b \arcsin x dx = \arcsin x$ D. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = 0$

7. 下列反常积分收敛的是

- A. $\int_0^{+\infty} e^x dx$ B. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$
C. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ D. $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}} dx$

8. 方程 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ 表示的二次曲面是

- A. 球面 B. 旋转抛物面
C. 圆柱面 D. 圆锥面

9. 函数 $\frac{1}{3-x}$ 在 $(-3, 3)$ 内展开成 x 的幂级数是

- A. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$ B. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$
C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$

10. 微分方程 $y'' - 2y = e^x$ 的特解形式应设为

- A. $y^* = Ae^x$ B. $y^* = Axe^x$
C. $y^* = 2e^x$ D. $y^* = e^x$

第Ⅱ卷(非选择题,共110分)

得分	评卷人

二、填空题(11~20小题,每小题4分,共40分)

11. 函数 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x < 0, \\ \frac{a+x^2}{6}, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 连续, 此时 $a =$ _____.

12. 若 $f'(x_0) = 1, f(x_0) = 0$, 则 $\lim_{h \rightarrow \infty} h f\left(x_0 - \frac{1}{h}\right) =$ _____.

13. 设 $y = (\tan x)^{\frac{1}{2}}$, 则 $y' =$ _____.

14. 函数 $y = \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上满足罗尔定理, 则 $\xi =$ _____.

15. $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx =$ _____.

16. $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{4-x}} dx =$ _____.

17. 将积分 $I = \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$ 改变积分顺序, 则 $I =$ _____.

18. 幂级数 $\frac{1}{1 \times 3}x + \frac{1}{2 \times 3^2}x^2 + \frac{1}{3 \times 3^3}x^3 + \cdots$ 的收敛半径为_____.

19. 微分方程 $y'' + y = 0$ 的通解是_____.

20. 设 $f(x, y) = \sin(xy^2)$, 则 $df(x, y) =$ _____.

得 分	评卷人

三、解答题(21~28 题, 共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

求函数 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的二阶导数 y'' .

22. (本题满分 8 分)

求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \tan x \right]$.

23. (本题满分 8 分)

求 $\int \ln(1+x^2) dx$.

24. (本题满分 8 分)

求函数 $f(x, y) = e^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值.

25. (本题满分 8 分)

设 $z = \ln \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$, 求 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$.

26. (本题满分 10 分)

计算 $\iint_D \frac{y}{x} dx dy$, 其中 D 是由 $y = x, y = 2x, x = 2$ 与 $x = 4$ 围成.

27. (本题满分 10 分)

求由曲线 $y^2 = (x-1)^3$ 和直线 $x=2$ 所围成的图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积.

28. (本题满分 10 分)

已知 $\int_0^x (x-t)f(t)dt = 1 - \cos x$, 证明: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 1$.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 D

【考点点拨】 本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】 $x \rightarrow 0$ 时, $\lg |x| \rightarrow -\infty$, $\sin \frac{1}{x}$ 无极限, $\cot x \rightarrow \infty$, $\sqrt{1+x} - 1 \rightarrow 0$, 故选 D.

2. 【答案】 C

【考点点拨】 本题考查了函数的极限的知识点.

【应试指导】 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x^2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = \infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{2x} = 0$. 故选 C.

3. 【答案】 C

【考点点拨】 本题考查了函数在一点的导数的知识点.

【应试指导】 因 $f(x) = 2\ln x + e^x$, 于是 $f'(x) = \frac{2}{x} + e^x$, 故 $f'(2) = 1 + e^2$.

4.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了函数极值的知识点.

【应试指导】 因 $f(x) = (1+x)e^x$, 且处处可导, 于是, $f'(x) = e^x + (1+x) \cdot e^x = (x+2)e^x$, 令 $f'(x) = 0$ 得驻点 $x = -2$; 又 $x < -2$ 时, $f'(x) < 0$; $x > -2$ 时, $f'(x) > 0$; 从而 $f(x)$ 在 $x = -2$ 处取得极小值, 且 $f(x)$ 只有一个极值.

5.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_{-1}^1 x^4 dx = \int_{-1}^0 x^4 dx + \int_0^1 x^4 dx = 2 \int_0^1 x^4 dx = 2 \cdot \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{2}{5}$.

6.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 对于选项 A, 当 $0 < x < 1$ 时, $x^3 < x^2$, 则 $\int_0^1 x^3 dx < \int_0^1 x^2 dx$. 对于选项 B, 当 $1 < x < 2$ 时, $\ln x > (\ln x)^2$, 则 $\int_1^2 \ln x dx > \int_1^2 (\ln x)^2 dx$. 对于选项 C, $\frac{d}{dx} \int_a^b \arcsin x dx = 0$ (因 $\int_a^b \arcsin x dx$ 是一个常数). 对于选项 D, $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = 0$ 不成立, 因为当 $x = 0$ 时, $\frac{1}{x}$ 无意义.

7.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了反常积分的敛散性的知识点.

【应试指导】 对于选项 A, $\int_0^{+\infty} e^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^b - 1)$ 不存在, 此积分发散; 对于选项 B, $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_e^b \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\ln(\ln x) \right]_e^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln(\ln b)$ 不存在, 此积分发散; 对于选项 C, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (2\sqrt{b} - 2)$ 不存在, 此积分发散; 对于选项 D, $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-\frac{3}{2}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{b}} \right) = 2$, 故此积分收敛.

8.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了二次曲面(圆锥面)的知识点.

【应试指导】 因方程可化为, $z^2 = x^2 + y^2$, 由方程可知它表示的是圆锥面.

9.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数展开为幂级数的知识点.

【应试指导】 因 $\frac{1}{3-x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$, 故选 B.

10.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了二阶线性微分方程的特解形式的知识点.

【应试指导】 由方程知, 其特征方程为, $r^2 - 2 = 0$, 有两个特征根 $r = \pm\sqrt{2}$. 又自由项 $f(x) = e^x$, $\lambda = 1$ 不是特征根, 故特解 y^* 可设为 Ae^x .

二、填空题

11.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了函数在一点处的连续性的知识点.

【应试指导】 由 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a+x^2}{6} = \frac{a}{6}$, 且 $f(0) = \frac{a}{6}$, 又因 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $\frac{a}{6} = 0$, 所以 $a = 0$.

12.【答案】 -1

【考情点拨】 本题考查了利用导数定义求极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{h \rightarrow \infty} h f\left(x_0 - \frac{1}{h}\right) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{f\left(x_0 - \frac{1}{h}\right) - f(x_0)}{\frac{1}{h}} \stackrel{t = \frac{1}{h}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} (-1) \cdot \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{-t} = -f'(x_0) = -1$.

13.【答案】 $(\tan x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{\sec^2 x}{x \tan x} - \frac{1}{x^2} \ln \tan x \right)$

【考情点拨】 本题考查了函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 $y = (\tan x)^{\frac{1}{x}}$, 则 $\ln y = \frac{1}{x} \ln \tan x$. 所以 $\frac{1}{y} y' = \frac{\frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x \cdot x - \ln \tan x}{x^2}$, 则 $y' = y \cdot \frac{x \sec^2 x - \tan x \ln \tan x}{x^2 \tan x} = (\tan x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x \sec^2 x - \tan x \ln \tan x}{x^2 \tan x} = (\tan x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{\sec^2 x}{x \tan x} - \frac{1}{x^2} \ln \tan x \right)$.

注: 本题另解如下:

$y' = [(\tan x)^{\frac{1}{x}}]' = \{e^{\frac{1}{x} \ln \tan x}\}' = (e^{\frac{1}{x} \ln \tan x})' = e^{\frac{1}{x} \ln \tan x} \cdot \left(\frac{\ln \tan x}{x}\right)' = (\tan x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x \frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x - \ln \tan x}{x^2}$
 $= (\tan x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{\sec^2 x}{x \tan x} - \frac{1}{x^2} \ln \tan x \right)$.

14.【答案】 π

【考情点拨】 本题考查了罗尔定理的知识点.

【应试指导】 $\cos 2\pi - \cos 0 = y' \Big|_{x=\xi} \cdot (2\pi - 0)$, 即 $0 = -\sin \xi \cdot 2\pi$, 所以 $\sin \xi = 0$, 故 $\xi = \pi$.

15.【答案】 $x - \arctan x + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \arctan x + C$.

16.【答案】 $\frac{\pi}{6}$

【考情点拨】 本题考查了利用换元法求定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{4-x}} dx \stackrel{\sqrt{x}=t}{=} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t}{t \sqrt{4-t^2}} dt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4-t^2}} dt \stackrel{t=2\sin u}{=} 2 \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{2\cos u} 2\cos u du = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$.

17.【答案】 $\int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) dx$

【考情点拨】 本题考查了改变积分顺序的知识点.

【应试指导】 由 $I = \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) dx dy$, 则 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2x\}$, D 还可有另一种表示方法, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2, \frac{y}{2} \leq x \leq y\} \cup \{(x, y) \mid 2 \leq y \leq 4, \frac{y}{2} \leq x \leq 2\}$, 所以 $I = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx$.

18.【答案】 3

【考情点拨】 本题考查了幂级数的收敛半径的知识点.

【应试指导】 所给幂级数通项为 $\frac{1}{n \times 3^n} x^n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \times 3^{n+1}}{1}{n \times 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$, 所以收敛半径 $R = 3$.

19.【答案】 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

【考情点拨】 本题考查了二阶线性微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 微分方程 $y'' + y = 0$ 的特征方程是 $r^2 + 1 = 0$, 故特征根为 $r = \pm i$, 所以方程的通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

20.【答案】 $y^2 \cos(xy^2) dx + 2xy \cos(xy^2) dy$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 $df(x, y) = \cos(xy^2) d(xy^2) = \cos(xy^2)(y^2 dx + 2xy dy) = y^2 \cos(xy^2) dx + 2xy \cos(xy^2) dy$.

注: 本题也可先求出 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, 而得出 $df(x, y)$.

三、解答题

$$21. y' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$y'' = [(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}]' = -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x$$

$$= -\frac{x}{(\sqrt{1+x^2})^3}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \tan x \right] \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{t \rightarrow 0} \left[t \cdot \tan \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} (t \cdot \cot t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos t}{\sin t} = 1.$$

$$23. \int \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) - \int x \cdot \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$= x \ln(1+x^2) - 2 \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx$$

$$= x \ln(1+x^2) - 2(x - \arctan x) + C.$$

$$24. \frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x}(x+y^2+2y) + e^{2x}$$

$$= e^{2x}(1+2x+2y^2+4y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{2x}(2y+2) = 2e^{2x}(y+1),$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^{2x}(1+2x+4y+2y^2) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2e^{2x}(y+1) = 0, \end{cases}$$

$$\text{得 } y = -1, x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{而 } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{2x}(1+2x+4y+2y^2) + 2e^{2x}$$

$$= e^{2x}(4+4x+8y+4y^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^{2x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4e^{2x}(y+1),$$

$$\text{所以在点 } \left(\frac{1}{2}, -1\right) \text{ 处 } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e.$$

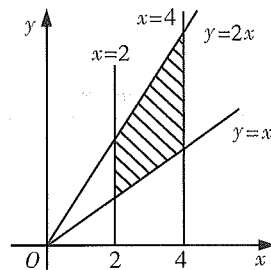
因此 $f(x, y)$ 在点 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ 处 $\Delta = -4e^2 < 0$, 且 $A > 0$, 故 $f(x, y)$ 在点 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ 取得极小值, 且极小值为 $-\frac{1}{2}e$.

$$25. \text{由 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{4\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})},$$

$$\text{所以 } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{4\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{y}{4\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{1}{4}.$$

26. 积分区域 D 如下图所示.



被积函数 $f(x, y) = \frac{y}{x}$, 化为二次积分时对哪个变量皆易于积分; 但是区域 D 易于用 X -型不等式表示, 因此选择先对 y 积分, 后对 x 积分的二次积分次序.

$$D \text{ 可表示为 } \begin{cases} 2 \leq x \leq 4, \\ x \leq y \leq 2x, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \iint_D \frac{y}{x} dx dy &= \int_2^4 dx \int_x^{2x} \frac{y}{x} dy = \int_2^4 \frac{y^2}{2x} \Big|_x^{2x} dx \\ &= \int_2^4 \frac{3}{2} x dx = \frac{3}{4} x^2 \Big|_2^4 = 9. \end{aligned}$$

$$27. V_x = \int_1^2 \pi(x-1)^3 dx = \frac{1}{4} \pi.$$

注: 本题关键是确定积分区间, 曲线为 $y^2 = (x-1)^3$. 由 $y^2 \geq 0$ 知 $x-1 \geq 0$ 即 $x \geq 1$, 又与直线 $x=2$ 所围成的图形, 所以积分区间为 $[1, 2]$.

$$28. \text{因 } \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1 - \cos x, \text{ 于是}$$

$$\text{有 } \int_0^x x \cdot f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = 1 - \cos x,$$

$$\text{即 } x \cdot \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = 1 - \cos x,$$

$$\text{两边求导得 } \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \sin x,$$

$$\text{从而有 } \int_0^x f(t)dt = \sin x,$$

$$\text{故 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(一)

全真模拟(二)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间150分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得分	评卷人

一、选择题(1~10小题,每小题4分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} =$ 【 】
A. 0 B. 1
C. ∞ D. 不存在但不是 ∞
- 设 $f'(1)=1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$ 等于 【 】
A. -1 B. 0
C. $\frac{1}{2}$ D. 1
- 下列函数中,在 $x=0$ 处可导的是 【 】
A. $y=|x|$ B. $y=\sqrt{x}$
C. $y=x^3$ D. $y=\ln x$
- 函数 $y=e^x + \arctan x$ 在区间 $[-1,1]$ 上 【 】
A. 单调减少 B. 单调增加
C. 无最大值 D. 无最小值
- 曲线 $y = \frac{x+x\sin x}{x^2-1} - 1$ 的水平渐近线的方程是 【 】
A. $y=2$ B. $y=-2$
C. $y=1$ D. $y=-1$
- 设 $y = \cos x$, 则 $y'' =$ 【 】
A. $\sin x$ B. $\cos x$
C. $-\cos x$ D. $-\sin x$

- 设函数 $z = xy^2 + e^{\frac{x}{y}}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,1)}$ 等于 【 】
A. 0 B. 1
C. 2 D. -1
- 二元函数 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极小值点为 【 】
A. (1,0) B. (1,2)
C. (-3,0) D. (-3,2)
- 设 $\iint_D f(x,y) dx dy = \int_1^2 dy \int_y^2 f(x,y) dx$, 则积分区域 D 可以表示为 【 】
A. $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ x \leq y \leq 2 \end{cases}$
C. $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ 1 \leq y \leq x \end{cases}$ D. $\begin{cases} 1 \leq y \leq 2, \\ 1 \leq x \leq y \end{cases}$
- 下列级数中发散的是 【 】
A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$
C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

第Ⅱ卷(非选择题,共110分)

得分	评卷人

二、填空题(11~20小题,每小题4分,共40分)

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2}{x}}{\sin \frac{4}{x}} =$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) =$.
- 若 $x = at \cos t$, $y = at \sin t$, 则 $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} =$.
- $\int (\tan \theta + \cot \theta)^2 d\theta =$.
- 设 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} + a, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a =$.
- $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx =$.
- 设函数 $z = x^2 e^y$, 则全微分 $dz =$.

18. 设 $z=f(x^2+y^2, e^{\frac{x}{y}})$ 可微, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

19. 微分方程 $y''+6y'+13y=0$ 的通解为 _____.

20. 设 D 为 $x^2+y^2 \leq 4$ 且 $y \geq 0$, 则 $\iint_D 2xdxdy =$ _____.

得 分	评卷人

三、解答题(21~28 题, 共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

设 $\sin(t \cdot s) + \ln(s-t) = t$, 求 $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0}$ 的值.

22. (本题满分 8 分)

设 $f(x) = \int_x^0 t e^{-t^2} dt$, 求 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最大值.

23. (本题满分 8 分)

如果 $\int f(x) e^{-\frac{1}{x}} dx = e^{-\frac{1}{x}} + C$, 试求 $\int f(x) dx$.

24. (本题满分 8 分)

求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \sin 2x dx$.

25. (本题满分 8 分)

计算 $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dxdy$, 其中 D 为圆域 $x^2+y^2 \leq 9$.

26. (本题满分 10 分)

设 z 是 x, y 的函数, 且 $xy = xf(z) + y\varphi(z)$, $xf'(z) + y\varphi'(z) \neq 0$,

证明: $[x - \varphi(z)] \frac{\partial z}{\partial x} = [y - f(z)] \frac{\partial z}{\partial y}$.

27. (本题满分 10 分)

设 $f(x) + 2 \int_0^x f(t) dt = x^2$, 求 $f(x)$.

28. (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} (x-1)^{2n}$ 的收敛区间.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了函数的极限的知识点.

【应试指导】 $\because \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = \infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0. \therefore \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在,故选 D.

2.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了利用导数定义求极限的知识点.

【应试指导】 因 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} \right] = \frac{1}{2} f'(1)$, 因 $f'(1) = 1$, 故极限值为 $\frac{1}{2}$.

3.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数在一点处可导的知识点.

【应试指导】 选项 A 中, $y = |x|$, 在 $x = 0$ 处有尖点, 即 $y = |x|$ 在 $x = 0$ 处不可导; 选项 B 中, $y = \sqrt{x}, y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $x = 0$ 处不存在, 即 $y = \sqrt{x}$ 在 $x = 0$ 处不可导; 选项 C 中, $y = x^3, y' = 3x^2$ 处处存在, 即 $y = x^3$ 处处可导, 也就在 $x = 0$ 处可导; 选项 D 中, $y = \ln x, y' = \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处不存在, $y = \ln x$ 在 $x = 0$ 处不可导(事实上, 在 $x = 0$ 点就没定义).

4.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的单调性的知识点.

【应试指导】 因 $y' = e^x + \frac{1}{1+x^2} > 0$ 处处成立, 于是函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内都是单调增加的, 故在 $[-1, 1]$ 上单调增加.

5.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了曲线的水平渐近线的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+x\sin x}{x^2-1} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{1}{x} + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} - 1 \right] = -1$, 所以水平渐近线为 $y = -1$.

注: 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 则 $y = A$ 是水平渐近线, 若 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$, 则 $x = c$ 是铅直渐近线.

6.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数的二阶导数的知识点.

【应试指导】 $y = \cos x, y' = -\sin x, y'' = -\cos x$.

7.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数在一点处的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z = xy^2 + e^{\frac{x}{y}}$, 从而 $z \Big|_{(x,1)} = x + e^x$, 于是 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=0} = 1 + e^0 = 2$.

8.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了二元函数的极值的知识点.

【应试指导】 因 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 于是 $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6x - 9, \frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 + 6y, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 6, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6y + 6$,

令 $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0, \\ y^2 - 2y = 0, \end{cases}$ 得驻点 $(-3, 0), (-3, 2), (1, 0), (1, 2)$.

对于点 $(-3, 0), A = -18 + 6 = -12, B = 0, C = 6, B^2 - AC = 72 > 0$, 故此点为非极值点.

对于点 $(-3, 2), A = -12, B = 0, C = -12 + 6 = -6, B^2 - AC = -72 < 0$, 故此点为极大值点.

对于点 $(1, 0), A = 12, B = 0, C = 6, B^2 - AC = -72 < 0$, 故此点为极小值点.

对于点 $(1, 2), A = 12, B = 0, C = -6, B^2 - AC = 72 > 0$, 故此点为非极值点.

9.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了二重积分的积分区域的表示的知识点.

【应试指导】 据右端的二次积分可得积分区域 D 为 $\begin{cases} 1 \leq y \leq 2, \\ y \leq x \leq 2, \end{cases}$ 选项中显然没有这个结果, 于是须将该区域 D

用另一种不等式(X -型)表示. 故 D 又可表示为 $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ 1 \leq y \leq x. \end{cases}$

10.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了级数的敛散性的知识点.

【应试指导】 当 $n > 5$ 时, $2^n > n^2$, 所以 $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n^2}$, 故选项 A 收敛; 选项 B 是交错级数, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 单调递减且 $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 故选项 B 收敛; 选项 C, $\frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, \frac{3}{2} > 1$, 所以选项 C 收敛; 用排除法故知选项 D 正确, 其实从收敛的必要条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, 故选项 D 发散.

二、填空题

11.【答案】 $\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了函数的极限的知识点.

【应试指导】 令 $\frac{1}{x} = t$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2}{x}}{\frac{4}{\sin \frac{1}{x}}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{\sin 4t} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

12.【答案】 $\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了对 $\infty - \infty$ 型未定式极限的知识点.

【应试指导】 这是 $\infty - \infty$ 型, 应合并成一个整体, 再求极限. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$.

13.【答案】 $-\frac{2}{\pi}$

【考情点拨】 本题考查了对由参数方程确定的函数求导的知识点.

【应试指导】 参数方程为 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. 本题 $\varphi(t) = at \cos t, \psi(t) = at \sin t$, 所以 $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{(a \sin t + at \cos t)}{a \cos t - at \sin t} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{a}{-a \cdot \frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$.

14.【答案】 $\tan \theta - \cot \theta + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int (\tan \theta + \cot \theta)^2 d\theta = \int (\tan^2 \theta + 2 + \cot^2 \theta) d\theta = \int (\sec^2 \theta + \csc^2 \theta) d\theta = \tan \theta - \cot \theta + C$.

15.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了函数在一点处的连续性的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x \sin \frac{1}{x} + a \right) = a, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} = 1$, 又 $f(0) = 1$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续应有 $a=1$.

注: (无穷小量 $\times$ 有界量 = 无穷小量) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, 这是常用极限, 应记牢.

16. 【答案】 $1 - \frac{\pi}{4}$

【考情点拨】 本题考查了利用换元法求定积分的知识点.

【应试指导】 令 $x = \sin t$, 则 $dx = \cos t dt$. 所以 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx \xrightarrow{\text{令 } x = \sin t} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin^2 t} \cos t dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt = -\cot t \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 1 - \frac{\pi}{4}$.

17. 【答案】 $dz = 2xe^y dx + x^2 e^y dy$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 $z = x^2 e^y, \frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^y, \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 e^y$, 则 $dz = 2xe^y dx + x^2 e^y dy$.

18. 【答案】 $2y f_1 - \frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} f_2$

【考情点拨】 本题考查了复合函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial y} = f_1 \cdot 2y + f_2 e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) = 2y f_1 - \frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} f_2$.

19. 【答案】 $y = e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

【考情点拨】 本题考查了二阶线性齐次微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 微分方程 $y'' + 6y' + 13y = 0$ 的特征方程为 $r^2 + 6r + 13 = 0$, 特征根为 $r = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = -3 \pm 2i$,

所以微分方程的通解为 $y = e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

20. 【答案】 4π

【考情点拨】 本题考查了二重积分的知识点.

【应试指导】 因积分区域为圆 $x^2 + y^2 = 2^2$ 的上半圆, 则 $\iint_D 2 dx dy = 2 \times \frac{1}{2} \pi \times 2^2 = 4\pi$.

三、解答题

21. 在 $\sin(t \cdot s) + \ln(s - t) = t$ 两边对 t 求导, 视 s 为 t 的函数, 有

$$\cos(t \cdot s)(s + t \cdot s') + \frac{1}{s - t} \cdot (s' - 1) = 1,$$

而当 $t=0$ 时, $s=1$, 代入上式得 $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = 1$.

22. $\because f'(x) = -xe^{-x^2}, \therefore f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减, $\therefore$ 它的最大值是 $f(1)$, 而

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_1^0 te^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-t^2} d(-t^2) \\ &= \frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (e^{-1} - 1). \end{aligned}$$

23. 由 $\int f(x) e^{-\frac{1}{x}} dx = e^{-\frac{1}{x}} + C$, 两端对 x 求导, 得

$$f(x) e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2},$$

所以 $f(x) = \frac{1}{x^2}$,

$$\text{故 } \int f(x) dx = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C.$$

$$\begin{aligned} 24. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \sin 2x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^3 x \sin x \cos x dx \\ &\xrightarrow{t = \sin x} \int_0^1 2t^4 dt = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

25. 用极坐标系进行计算.

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \frac{1}{1+r^2} r dr \\ &= 2\pi \int_0^3 \frac{1}{2} \frac{1}{1+r^2} d(1+r^2) \\ &= \pi \cdot \ln(1+r^2) \Big|_0^3 \\ &= \pi \ln 10. \end{aligned}$$

26. 在已知等式两边对 x 求导, y 视为常数, 有

$$y = x f'(z) \frac{\partial z}{\partial x} + y \varphi'(z) \frac{\partial z}{\partial x} + f(z),$$

$$\text{所以 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y - f(z)}{x f'(z) + y \varphi'(z)},$$

$$\text{同样方法可得, } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x - \varphi(z)}{x f'(z) + y \varphi'(z)},$$

$$\text{所以 } [x - \varphi(z)] \frac{\partial z}{\partial x} = [x - \varphi(z)] \cdot \frac{y - f(z)}{x f'(z) + y \varphi'(z)},$$

$$[y - f(z)] \frac{\partial z}{\partial y} = [y - f(z)] \cdot \frac{x - \varphi(z)}{x f'(z) + y \varphi'(z)},$$

$$\text{故 } [x - \varphi(z)] \frac{\partial z}{\partial x} = [y - f(z)] \frac{\partial z}{\partial y}.$$

27. 由 $f(x) + 2 \int_0^x f(t) dt = x^2$, 两边对 x 求导得

$$f'(x) + 2f(x) = 2x,$$

这是一个一阶线性常微分方程, 解得

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\int 2 dx} \left(\int 2x e^{\int 2 dx} dx + C \right) \\ &= e^{-2x} \left(\int 2x e^{2x} dx + C \right) \\ &= x - \frac{1}{2} + C e^{-2x}. \end{aligned}$$

28. 令 $(x-1)^2 = t$, 则级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} t^n$.

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2(n+1)} = 1, \therefore R = 1,$$

故级数在 $0 \leq t < 1$, 即 $-1 < x-1 < 1$ 上收敛, 而当 $t=1$ 时, 即 $x=2$ 或 $x=0$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$, 这是交错级数, 由莱布尼茨判别法知级数收敛.

$\therefore$ 级数在 $[0, 2]$ 上收敛.

注: 本题另解如下,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{2(n+1)} (x-1)^{2n+2}}{\frac{1}{2n} (x-1)^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} (x-1)^2 = |x-1|^2,$$

所以当 $|x-1| < 1$ 时级数收敛, 即 $0 < x < 2$ 时级数收敛,

同上知 $x=0$ 或 $x=2$ 时级数收敛, 故级数的收敛区间为 $[0, 2]$.



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(一)

全真模拟(三)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.满分150分.考试时间150分钟.

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得分	评卷人

一、选择题(1~10小题,每小题4分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 若 $\int f(x)dx = x \ln(x+1) + C$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 等于 【 】
- A. 2 B. -2
C. -1 D. 1
2. 若 $f(x-1) = x^2 - 1$, 则 $f'(x)$ 等于 【 】
- A. $2x+2$ B. $x(x+1)$
C. $x(x-1)$ D. $2x-1$
3. 设函数 $f(x)$ 满足 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$, 且 $f(0) = 0$, 则 $f(x) =$ 【 】
- A. $\cos x + \frac{1}{2} \cos^2 x$ B. $\sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x$
C. $\sin^2 x - \frac{1}{2} \sin^4 x$ D. $x - \frac{1}{2} x^2$
4. 函数 $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$ 有 【 】
- A. 极大值 $f(4, 1) = 63$ B. 极大值 $f(0, 0) = 20$
C. 极大值 $f(-4, 1) = -1$ D. 极小值 $f(-4, 1) = -1$
5. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 x 等价的无穷小量是 【 】
- A. $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ B. $\ln(1+x)$
C. $2(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})$ D. $x^2(x+1)$

6. 使 $\int_1^{+\infty} f(x) dx = 1$ 成立的 $f(x)$ 为 【 】

- A. $\frac{1}{x^2}$ B. $\frac{1}{x}$
C. e^{-x} D. $\frac{1}{1+x^2}$

7. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{1}{n^2}$ 是 【 】

- A. 绝对收敛 B. 条件收敛
C. 发散 D. 无法确定敛散性

8. 方程 $z = x^2 + y^2$ 表示的曲面是 【 】

- A. 椭球面 B. 旋转抛物面
C. 球面 D. 圆锥面

9. 已知 $f(xy, x-y) = x^2 + y^2$, 则 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ 等于 【 】

- A. 2 B. $2x$
C. $2y$ D. $2x+2y$

10. 微分方程 $y'' - 7y' + 12y = 0$ 的通解为 【 】

- A. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-4x}$ B. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{4x}$
C. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$ D. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-4x}$

第Ⅱ卷(非选择题,共110分)

得分	评卷人

二、填空题(11~20小题,每小题4分,共40分)

11. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{x+1} =$ _____.
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5^n \sin \frac{x}{5^n}\right) =$ _____.
13. 若 $y = \left(\frac{1}{x}\right)^x$, 则 $y' =$ _____.
14. 由 $\int f(x)dx = \arctan \frac{1}{x} + C$, 求 $f(x)$ 的导数等于 _____.
15. 函数 $f(x) = x\sqrt{3-x}$ 在 $[0, 3]$ 上满足罗尔定理, 则 $\xi =$ _____.
16. $\int_0^1 x^2 dx =$ _____.
17. $\int \sec^2 5x dx =$ _____.
18. 已知 $z = (1+xy)^y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,1)} =$ _____.
19. 若将 $I = \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$ 改变积分顺序, 则 $I =$ _____.
20. 方程 $y' - e^{x-y} = 0$ 的通解为 _____.

得 分	评卷人

三、解答题(21~28题,共70分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分8分)

若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^x}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,求 a .

22.(本题满分8分)

函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y = \sin(x+y)$ 确定,求 dy .

23.(本题满分8分)

求 $\int x^2 e^x dx$.

24.(本题满分8分)

求 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$.

25.(本题满分8分)

已知 $z = y^{\ln xy}$,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

26.(本题满分10分)

计算 $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$,其中 D 为 $x^2+y^2 \leq 1$,且 $x \geq 0, y \geq 0$ 所围区域.

27.(本题满分10分)

求 $\begin{cases} x = \int_0^t \frac{5au}{(1+u^2)^2} du, \\ y = \frac{2at^2}{1+t^2} \end{cases}$ 在 $t=1$ 处的切线方程.

28.(本题满分10分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{2n-1}$ 的收敛区间.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了一元函数的导数及其极限的知识点.

【应试指导】 因 $\int f(x)dx = x\ln(x+1) + C$, 所以 $f(x) = [x\ln(x+1) + C]' = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} + 1 = 2.$$

2.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 因 $f(x-1) = x^2 - 1$, 故 $f(x) = (x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x$, 则 $f'(x) = 2x + 2$.

3.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了已知导函数求原函数的知识点.

【应试指导】 由 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$, 知 $f'(\sin^2 x) = 1 - \sin^2 x$. 令 $u = \sin^2 x$, 故 $f'(u) = 1 - u$. 所以 $f(u) = u - \frac{1}{2}u^2 + C$, 由 $f(0) = 0$, 得 $C = 0$. 所以 $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2$.

4.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了函数的极值的知识点.

【应试指导】 因 $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$, 于是 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 9, \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 6$. 令 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$,

得驻点 $(-4, 1)$. 又因 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$. 故对于点 $(-4, 1), A = 2, B = -1, C = 2, B^2 - AC = -3 < 0$,

且 $A > 0$, 因此 $z = f(x, y)$ 在点 $(-4, 1)$ 处取得极小值, 且极小值为 $f(-4, 1) = -1$.

5.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了等价无穷小量的知识点.

【应试指导】 对于选项 A, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \infty$, 故 $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ 是在 $x \rightarrow 0$ 时的比 x 低阶的无穷小; 对

于选项 B, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1$, 故 $\ln(1+x)$ 是 $x \rightarrow 0$ 时与 x 等价的无穷小; 对于选项 C,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = 2, \text{ 故}$$

$2(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})$ 是 $x \rightarrow 0$ 时与 x 同阶非等价的无穷小; 对于选项 D, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x(x+1) = 0$, 故 $x^2(x+1)$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的比 x 高阶的无穷小.

6.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了反常积分的敛散性的知识点.

【应试指导】 对于选项 A, $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} = 1$, 故此积分收敛, 且收敛于 1; 对于选项 B,

$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \ln x \Big|_1^{+\infty}$ 不存在; 对于选项 C, $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x} \Big|_1^{+\infty} = e^{-1}$, 故此积分收敛,

但收敛于 e^{-1} ; 对于选项 D, $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, 故此积分收敛, 但收敛于 $\frac{\pi}{4}$, 故选 A.

7.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了级数的绝对收敛的知识点.

【应试指导】 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$, 故原级数等价于 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$, 所以级数绝对收敛.

8.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了二次曲面(旋转抛物面)的知识点.

【应试指导】 旋转抛物面的方程为 $z = x^2 + y^2$.

9.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了复合函数的偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $f(xy, x-y) = x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy$, 故 $f(x, y) = y^2 + 2x$, 从而 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2$.

10.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了二阶线性齐次微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 因方程 $y'' - 7y' + 12y = 0$ 的特征方程为 $r^2 - 7r + 12 = 0$, 于是有特征根 $r_1 = 3, r_2 = 4$, 故微分方程的通解为 $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$.

二、填空题

11.【答案】 e^{-2}

【考情点拨】 本题考查了函数的极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\left(-\frac{x}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{x}\right) \cdot (x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[-\frac{2(x+1)}{x}\right]} = e^{-2}$.

12.【答案】 x

【考情点拨】 本题考查了利用 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 求极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5^n \cdot \sin \frac{x}{5^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \sin \frac{x}{5^n}}{\frac{x}{5^n}} = x$.

13.【答案】 $\left(\frac{1}{x}\right)^x \left(\ln \frac{1}{x} - 1\right)$

【考情点拨】 本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 由 $y = \left(\frac{1}{x}\right)^x = e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^x} = e^{x \ln \frac{1}{x}}$, 所以 $y' = e^{x \ln \frac{1}{x}} \cdot \left[\ln \frac{1}{x} + x \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] = e^{x \ln \frac{1}{x}} \left(\ln \frac{1}{x} - 1\right) =$

$\left(\frac{1}{x}\right)^x \left(\ln \frac{1}{x} - 1\right)$.

注: 用对数求导法可解之如下:

$\ln y = x \cdot \ln \frac{1}{x}$, 两边对 x 求导得 $\frac{1}{y} \cdot y' = \ln \frac{1}{x} + x \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \ln \frac{1}{x} - 1$, 所以 $y' = \left(\frac{1}{x}\right)^x \left(\ln \frac{1}{x} - 1\right)$.

14.【答案】 $\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

【考情点拨】 本题考查了一元函数的导数的知识点.

【应试指导】 由 $\int f(x)dx = \arctan \frac{1}{x} + C$ 两边对 x 求导, 得 $f(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2 + 1}$, 所以

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

15. 【答案】 2

【考情点拨】 本题考查了罗尔定理的知识点.

【应试指导】 由 $f(x) = x\sqrt{3-x}$, 得 $f(0) = f(3) = 0$. 又因 $f'(x) = \sqrt{3-x} + x \frac{-1}{2\sqrt{3-x}} = \frac{2(3-x)-x}{2\sqrt{3-x}} = \frac{3(2-x)}{2\sqrt{3-x}}$, 故 $f'(\xi) = 0$, 所以 $\xi = 2$.

16. 【答案】 $\frac{1}{3}$

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

17. 【答案】 $\frac{1}{5}\tan 5x + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \sec^2 5x dx = \frac{1}{5} \int \sec^2 5x d(5x) = \frac{1}{5} \tan 5x + C$.

18. 【答案】 $1 + 2\ln 2$

【考情点拨】 本题考查了二元函数在一点处的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 由 $z = (1+xy)^y$, 两边取对数得 $\ln z = y \ln(1+xy)$, 则 $\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \ln(1+xy) + y \cdot \frac{x}{1+xy}$. 所以 $\frac{\partial z}{\partial y} = (1+xy)^y \left[\ln(1+xy) + \frac{xy}{1+xy} \right]$. 因此 $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,1)} = 2 \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right) = 1 + 2\ln 2$.

注: 将 $x = 1$ 代入 $z = (1+xy)^y$, 得 $z \Big|_{(1,y)} = e^{y \ln(1+y)}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{y \ln(1+y)} \left[\ln(1+y) + \frac{y}{1+y} \right]$. 所以 $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,1)} = 2 \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right) = 1 + 2\ln 2$.

19. 【答案】 $\int_0^1 dy \int_y^e f(x, y) dx$

【考情点拨】 本题考查了改变积分顺序的知识点.

【应试指导】 因积分区域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \ln x\} = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, e^y \leq x \leq e\}$, 所以 $I = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx$.

注: 画出草图就能清楚地看出积分区域的特征.

20. 【答案】 $e^y = e^x + C$

【考情点拨】 本题考查了可分离变量微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 $y' - e^{x-y} = 0$, 可改写为 $e^y dy = e^x dx$, 两边积分得 $e^y = e^x + C$.

三、解答题

21. 由 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{1} = -1$,

又因 $f(0) = a$, 所以当 $a = -1$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

22. 将 $e^y = \sin(x+y)$ 两边对 x 求导, 有

$$e^y \cdot y' = \cos(x+y)(1+y'),$$

$$\text{所以 } y' = \frac{\cos(x+y)}{e^y - \cos(x+y)},$$

$$\text{故 } dy = \frac{\cos(x+y)}{e^y - \cos(x+y)} dx.$$

$$\begin{aligned} 23. \int x^2 e^x dx &= \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int 2x e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2 \int x de^x \\ &= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C. \end{aligned}$$

24. 令 $\sqrt{x} = t$, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\arcsin t}{\sqrt{t^2(1-t^2)}} \cdot 2t dt = 2 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= 2 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \arcsin t d(\arcsin t) = (\arcsin t)^2 \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 - \left(\frac{\pi}{6} \right)^2 = \frac{5\pi^2}{144}. \end{aligned}$$

25. 由 $z = y^{\ln xy}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= y^{\ln xy} \cdot \ln y \cdot \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x} \ln y \cdot y^{\ln xy}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{x} \left[\frac{1}{y} \cdot y^{\ln xy} + \ln y \cdot (e^{\ln y \cdot \ln xy})' \right] \\ &= \frac{1}{x} \left[\frac{1}{y} y^{\ln xy} + \ln y \cdot e^{\ln y \cdot \ln xy} \left(\frac{1}{y} \ln xy + \frac{x}{xy} \ln y \right) \right] \\ &= \frac{1}{x} \left[\frac{1}{y} y^{\ln xy} + \ln y \cdot y^{\ln xy} \left(\frac{1}{y} \ln xy + \frac{1}{y} \ln y \right) \right] \\ &= \frac{1}{xy} \cdot y^{\ln xy} (1 + \ln y \cdot \ln xy^2). \end{aligned}$$

26. 用极坐标解(积分区域和被积函数均适宜用极坐标处理).

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy = \iint_D e^{r^2} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 e^{r^2} r dr = \frac{\pi}{4} (e - 1).$$

27. 由 $dy = \frac{4at(1+t^2) - 2t \cdot 2at^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{4at}{(1+t^2)^2} dt$,

$$dx = \frac{5at}{(1+t^2)^2} dt,$$

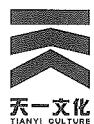
$$\text{所以 } y' = \frac{dy}{dx} = \frac{4}{5}, \text{ 而 } t = 1 \text{ 时, } y = a, x = \int_0^1 \frac{5au}{(1+u^2)^2} du = \frac{5}{4}a,$$

$$\text{故切线方程为 } y - a = \frac{4}{5} \left(x - \frac{5}{4}a \right), \text{ 即 } y = \frac{4}{5}x.$$

$$\begin{aligned} \text{注: } \int_0^1 \frac{5au}{(1+u^2)^2} du &= \int_0^1 \frac{5a}{2(1+u^2)^2} d(1+u^2) \\ &= \frac{5a}{2} \left[-\frac{1}{(1+u^2)} \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{5a}{2} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{5a}{4}. \end{aligned}$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{2^{n+1}} x^{2(n+1)-1}}{\frac{1}{2^n} x^{2n-1}} \right| = \frac{1}{2} x^2.$$

当 $\frac{1}{2} x^2 < 1$, 即 $x^2 < 2$ 时, 所给级数收敛, 因此, 收敛区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(一)

全真模拟(四)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间150分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得分	评卷人

一、选择题(1~10小题,每小题4分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1} =$

A. 1

B. 0

C. 2

D. $\frac{1}{2}$

2. 设函数 $y=x^2+1$, 则 $\frac{dy}{dx} =$

A. $\frac{1}{3}x^3$ B. x^2 C. $2x$ D. $\frac{1}{2}x$ 3. 函数 $y=e^x+e^{-x}$ 的单调增加区间是A. $(-\infty, +\infty)$ B. $(-\infty, 0]$ C. $(-1, 1)$ D. $[0, +\infty)$

4. 设 $\int f(x)dx = x^2 + C$, 则 $\int xf(1-x^2)dx =$

A. $-2(1-x^2)^2 + C$ B. $2(1-x^2)^2 + C$ C. $-\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + C$ D. $\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + C$ 5. 过点 $(0, 2, 4)$ 且平行于平面 $x+2z=1, y-3z=2$ 的直线方程为A. $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{-3}$ B. $\frac{x}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{-3}$ C. $\frac{x}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{1}$ D. $-2x+3(y-2)+z-4=0$

6. 设 $z=\ln(x^3+y^3)$, 则 $dz|_{(1,1)} =$

A. $dx+dy$ B. $\frac{1}{3}(dx+dy)$ C. $\frac{3}{2}(dx+dy)$ D. $2(dx+dy)$

7. 比较 $I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$ 的大小, 其中 $D: (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1$, 则

A. $I_1 = I_2$ B. $I_1 > I_2$ C. $I_1 < I_2$

D. 无法比较

8. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则

A. 可能有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ B. 一定有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ C. 一定有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ D. 一定有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

9. 微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$ 的通解为

A. $\frac{1}{\sin \frac{y}{x}} = Cx$ B. $\sin \frac{y}{x} = x+C$ C. $\sin \frac{y}{x} = Cx$ D. $\sin \frac{x}{y} = Cx$

10. 设方程 $y'' - 2y' - 3y = f(x)$ 有特解 y^* , 则它的通解为

A. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + y^*$ B. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$ C. $y = C_1 x e^{-x} + C_2 e^{3x} + y^*$ D. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + y^*$

第Ⅱ卷(非选择题,共110分)

得分	评卷人

二、填空题(11~20小题,每小题4分,共40分)

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x = 8$, 则 $a =$ _____.

12. 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x (e^t - 1) dt}{x^2}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$, 在 $x=0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

13. 设 $y = x^2 e^x$, 则 $y^{(10)}|_{x=0} =$ _____.

14. 设函数 $f(x)$ 有连续的二阶导数且 $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} =$ _____.

15. 求 $\int \frac{1}{e^x(1+e^{2x})} dx =$ _____.

16. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$ 则 $\int_{-2}^2 f(x) dx =$ _____.

17. 设 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$ _____.

18. 设 $I = \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dx$, 将此积分化为极坐标系下的积分, 此时 $I =$ _____.

19. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径为_____.

20. 方程 $\cos x \sin y dx + \sin x \cos y dy = 0$ 的通解为_____.

得 分	评卷人

三、解答题(21~28 题,共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

确定函数 $f(x, y) = 3axy - x^3 - y^3$ ($a > 0$) 的极值点.

22. (本题满分 8 分)

求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$.

23. (本题满分 8 分)

讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 的敛散性.

24. (本题满分 8 分)

求 $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$.

25. (本题满分 8 分)

证明: $e^x > 1 + x$ ($x > 0$).

26. (本题满分 10 分)

设 $x > 0$ 时 $f(x)$ 可导, 且满足 $f(x) = 1 + \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt$, 求 $f(x)$.

27. (本题满分 10 分)

求方程 $y'' - 2y' + 5y = e^x$ 的通解.

28. (本题满分 10 分)

设 $f(x) = \int_0^{a-x} e^{y(2a-y)} dy$, 求 $\int_0^a f(x) dx$ (提示: 利用二重积分交换顺序去计算).

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了利用 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 求极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x^2 - 1} (x + 1) = 2.$

2.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 $y = x^2 + 1, \frac{dy}{dx} = 2x.$

3.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了函数的单调区间的知识点.

【应试指导】 $y = e^x + e^{-x}$, 则 $y' = e^x - e^{-x}$, 当 $x > 0$ 时, $y' > 0$, 所以 y 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

4.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了换元积分法的知识点.

【应试指导】 $\int xf(1-x^2)dx = -\frac{1}{2} \int f(1-x^2)d(1-x^2) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + C.$

5.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了直线方程的知识点.

【应试指导】 两平面的交线方向 $S = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \{-2, 3, 1\}$, 即为所求直线的方向, 所以所求直线方程为 $\frac{x}{-2} =$

$$\frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{1}.$$

6.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x^2}{x^3 + y^3}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3y^2}{x^3 + y^3}, \therefore dz = \frac{3x^2 dx + 3y^2 dy}{x^3 + y^3}, \therefore dz \Big|_{(1,1)} = \frac{3}{2}(dx + dy).$

注:另解如下,由一阶微分形式不变性得 $dz = \frac{1}{x^3 + y^3}(3x^2 dx + 3y^2 dy)$, 所以 $dz \Big|_{(1,1)} = \frac{3}{2}(dx + dy).$

7.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了二重积分的性质的知识点.

【应试指导】 因积分区域 D 是以点 $(2, 1)$ 为圆心的一单位圆, 且它位于直线 $x + y = 1$ 的上方, 即在 D 内恒有 $x + y > 1$, 所以 $(x + y)^2 < (x + y)^3$. 所以有 $I_1 < I_2$.

8.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了级数收敛的必要性的知识点.

【应试指导】 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 可能有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 故 A 正确. 由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散可见 B 不成立, C 不成立. 由

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 发散知 D 不成立.

9.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了一阶微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 设 $\frac{y}{x} = u, y = xu, y' = u + x \frac{du}{dx}$, 代入有 $x \frac{du}{dx} = \tan u$, 所以 $\frac{du}{\tan u} = \frac{dx}{x}, \ln |\sin u| = \ln |x| +$

$\ln C, \sin u = Cx,$

原方程的通解为 $\sin \frac{y}{x} = Cx.$

10.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了二阶常系数微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 考虑对应的齐次方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解. 特征方程为 $r^2 - 2r - 3 = 0$, 所以 $r_1 = -1, r_2 = 3$, 所

以 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解为 $\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$, 所以原方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + y^*$.

二、填空题

11.【答案】 $\ln 2$

【考情点拨】 本题考查了 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}} \right]^{\frac{3ax}{x-a}} = e^{3a} = 8$, 所以 $a = \ln 2$.

12.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了函数在一点处的连续性的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} \cdot 2x}{2} = 0$, 又 $f(0) = a$, 则若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连

续, 应有 $a = 0$.

13.【答案】 90

【考情点拨】 本题考查了莱布尼茨公式的知识点.

【应试指导】 由莱布尼茨公式得, $y^{(10)} = x^2(e^x)^{(10)} + 10(x^2)' \cdot (e^x)^{(9)} + 45(x^2)''(e^x)^{(8)} = x^2 e^x + 20x e^x + 90 e^x$, 所以

$$y^{(10)} \Big|_{x=0} = 90.$$

14.【答案】 -1

【考情点拨】 本题考查了洛必达法则的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$

注: $f(x)$ 连续, 且 $f(0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 因此当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{f(x) - x}{x^2}$ 是“ $\frac{0}{0}$ ”型待定式, 故可用洛必达法则,

同样可说明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - 1}{2x}$ 仍为“ $\frac{0}{0}$ ”且可继续使用洛必达法则.

15.【答案】 $-\frac{1}{e^x} - \arctan e^x + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{1}{e^x(1+e^{2x})} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}(1+e^{2x})} dx = \int \frac{1}{e^x(1+e^{2x})} de^x \xrightarrow{e^x=t} \int \frac{1}{t^2(1+t^2)} dt = \int \frac{1}{t^2} dt - \int \frac{1}{1+t^2} dt =$
 $-\frac{1}{t} - \arctan t + C = -\frac{1}{e^x} - \arctan e^x + C.$

16.【答案】 $\frac{13}{2}$

【考情点拨】 本题考查了分段函数的定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^0 dx + \int_0^1 (x+1) dx + \int_1^2 2x dx = 2 + \frac{(x+1)^2}{2} \Big|_0^1 + x^2 \Big|_1^2 = 2 + 2 - \frac{1}{2} + 4 - 1 = \frac{13}{2}$.

注:分段函数的积分必须分段进行.

17.【答案】 $\frac{1}{z}$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的二阶偏导数的知识点.

【应试指导】 由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot x}{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$, 类似, 由对称性知 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$. 故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{z}$.

18.【答案】 $\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a r^2 dr$

【考情点拨】 本题考查了利用极坐标求积分的知识点.

【应试指导】 因积分区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq a, 0 \leq x \leq \sqrt{a^2 - y^2}\}$, 即 D 是圆 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 在第一象限部分, 故 $I = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a r^2 dr$.

19.【答案】 R

【考情点拨】 本题考查了幂级数的收敛半径的知识点.

【应试指导】 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 由幂级数的逐项微分定理知 $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径也是 R .

20.【答案】 $\sin x \cdot \sin y = C$

【考情点拨】 本题考查了可分离变量微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 由 $\cos x \sin y dx + \sin x \cos y dy = 0$, 知 $\sin y ds \sin x + \sin x ds \sin y = 0$, 即 $d(\sin x \cdot \sin y) = 0$, 两边积分得 $\sin x \cdot \sin y = C$, 这就是方程的通解.

三、解答题

21. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3ay - 3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3ax - 3y^2$, 令 $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, 联立有

$$\begin{cases} ax - y^2 = 0, \\ ay - x^2 = 0, \end{cases} \quad \text{解得 } x = y = a \text{ 或 } x = y = 0,$$

$$\text{由 } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3a,$$

$$\text{知 } \Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 9a^2 - 36xy.$$

在 $(0, 0)$ 点, $\Delta > 0$, 所以 $(0, 0)$ 不是极值点.

在 (a, a) 点, $\Delta < 0$, 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6a < 0 (a > 0)$, 故 (a, a) 是极大值点.

$$22. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x}{x} = \sin 1.$$

$$23. \text{因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = e^{-1}, \text{ 所以级数收敛.}$$

$$24. \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{x}{\sin^3 x} d \sin x$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \int x d(\sin x)^{-2} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sin^2 x} - \int \frac{1}{\sin^2 x} dx \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{x}{\sin^2 x} - \frac{1}{2} \cot x + C. \end{aligned}$$

25. 对 $F(x) = e^x$ 在 $[0, x]$ 上使用拉格朗日中值定理得

$$F(x) - F(0) = F'(\xi)x, 0 < \xi < x,$$

$$\text{因 } F'(\xi) = e^\xi > 1, \text{ 即 } \frac{F(x) - F(0)}{x} > 1,$$

故 $e^x > x + 1 (x > 0)$.

注:本题也可用单调性证明

$$\text{记 } G(x) = e^x - 1 - x, \text{ 则 } G'(x) = e^x - 1.$$

由 $x > 0$ 知 $G'(x) > 0$, 所以 $G(x)$ 单调增加, 由 $G(0) = 0$,

知 $G(x) > G(0) = 0$, 即 $e^x - 1 - x > 0$,

所以 $e^x > 1 + x$.

26. 因 $f(x) = 1 + \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt$ 可导, 在该式两边乘 x 得

$$xf(x) = x + \int_1^x f(t) dt,$$

$$\text{两边对 } x \text{ 求导得 } f(x) + xf'(x) = 1 + f(x),$$

$$\text{所以 } f'(x) = \frac{1}{x},$$

$$\text{则 } f(x) = \ln x + C,$$

再由 $x = 1$ 时, $f(1) = 1$,

得 $C = 1$, 故 $f(x) = \ln x + 1$.

27. $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的特征方程为 $r^2 - 2r + 5 = 0$,

故特征根为 $r = 1 \pm 2i$,

非齐次项的特解可设为 $y = Ae^x$, 代入原方程得 $A = \frac{1}{4}$,

所以方程的通解为

$$y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{4} e^x.$$

28. 将 $f(x)$ 代入有

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x) dx &= \int_0^a dx \int_0^{a-x} e^{y(2a-y)} dy \\ &= \int_0^a dy \int_0^{a-y} e^{y(2a-y)} dx \\ &= \int_0^a (a-y) e^{y(2a-y)} dy \\ &= \int_0^a (a-y) e^{a^2 - (a-y)^2} dy \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^a e^{a^2} e^{-(a-y)^2} d(a-y)^2 \\ &= -\frac{1}{2} e^{a^2} [-e^{-(a-y)^2}] \Big|_0^a \\ &= -\frac{1}{2} e^{a^2} (e^{-a^2} - e^0) \\ &= \frac{1}{2} (e^{a^2} - 1). \end{aligned}$$



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(一)

全真模拟(五)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.满分150分.考试时间150分钟.

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得分	评卷人

一、选择题(1~10小题,每小题4分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

$$1. \text{函数 } f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处}$$

A. 连续且可导

B. 连续且不可导

C. 不连续

D. 不仅可导,导数也连续

$$2. \text{曲线 } y = \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$$

A. 没有渐近线

B. 仅有水平渐近线

C. 仅有铅直渐近线

D. 既有水平渐近线,又有铅直渐近线

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)+a}{x} = 6, \text{ 则 } a \text{ 的值为}$$

A. -1

B. 1

C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

$$4. \text{设 } f(x) = \int_0^{\sin x} \sin t^2 dt, g(x) = x^3 + x^4, \text{ 当 } x \rightarrow 0 \text{ 时 } f(x) \text{ 与 } g(x) \text{ 是}$$

A. 等价无穷小

B. $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶无穷小C. $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶无穷小D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶但非等价无穷小

$$5. \text{已知 } \int f(x^2) dx = e^{\frac{x}{2}} + C, \text{ 则 } f(x) =$$

A. $\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ B. $\frac{1}{2}e^{\frac{\sqrt{x}}{2}}$ C. $e^{\frac{x}{2}}$ D. $e^{\frac{\sqrt{x}}{2}}$ 6. 曲线 $y=e^x$ 与其过原点的切线及 y 轴所围面积为

A. $\int_0^1 (e^x - ex) dx$

B. $\int_1^e (\ln y - y \ln y) dy$

C. $\int_0^e (e^x - xe^x) dx$

D. $\int_0^1 (\ln y - y \ln y) dy$

7. 设函数 $f(x) = \cos x$, 则 $f'(\frac{\pi}{2}) =$

A. 1

B. 0

C. $-\frac{1}{2}$

D. -1

8. 设 $y = e^x \sin x$, 则 $y''' =$ A. $\cos x \cdot e^x$ B. $\sin x \cdot e^x$ C. $2e^x (\cos x - \sin x)$ D. $2e^x (\sin x - \cos x)$ 9. 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛, 则此级数在 $x=2$ 处

A. 发散

B. 条件收敛

C. 绝对收敛

D. 不能确定

$$10. f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) dt + \ln 2, \text{ 则 } f(x) =$$

A. $e^x \ln 2$ B. $e^{2x} \ln 2$ C. $e^x + \ln 2$ D. $e^{2x} + \ln 2$

第Ⅱ卷(非选择题,共110分)

得分	评卷人

二、填空题(11~20小题,每小题4分,共40分)

$$11. \text{函数 } F(x) = \int_1^x \left(2 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt (x > 0) \text{ 的单调递减区间是}$$

$$12. \text{设 } f''(x) \text{ 连续, } z = \frac{1}{x} f(xy) + y f(x+y), \text{ 则 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$$

$$13. \text{设 } I = \iint_D x^2 y dx dy, D \text{ 是圆域 } x^2 + y^2 \leq a^2, \text{ 则 } I =$$

$$14. \text{设 } f(x) = ax^3 - 6ax^2 + b \text{ 在区间 } [-1, 2] \text{ 的最大值为 } 2, \text{ 最小值为 } -29, \text{ 又知 } a > 0, \text{ 则 } a, b \text{ 的取值为}$$

$$15. \text{设曲线 } y = \frac{x^2 + x - 2}{1 - x^2}, \text{ 则该曲线的铅直渐近线为}$$

$$16. \text{当 } p \text{ 时, 级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{1+n^p} \text{ 收敛.}$$

$$17. \text{求 } \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx =$$

$$18. \text{幂级数 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2 + 1} x^n \text{ 的收敛半径 } R =$$

$$19. \text{方程 } y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x \text{ 的特解可设为 } y^* =$$

$$20. \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx =$$

得分	评卷人

三、解答题(21~28题,共70分.解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分8分)

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} \frac{A(1-\cos 2x)}{x^2}, & x < 0, \\ 4, & x = 0, \\ \frac{B\sin x + \int_0^x \cos t^2 dt}{x}, & x > 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 连续, 试确定 } A, B.$$

22. (本题满分8分)

已知由 $\int_0^y e^{t^2} dt = \int_0^{x^2} \cos t dt + \cos y^2$ 确定 y 是 x 的函数, 求 dy .

23. (本题满分8分)

求 $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$.

24. (本题满分8分)

设函数 $z(x, y)$ 由方程 $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ 所确定,

证明: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.

25. (本题满分8分)

求方程 $(y - x^2 y) y' = x$ 的通解.

26. (本题满分10分)

已知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且 $f(a) = f(b)$, 在 (a, b) 内 $f''(x)$ 存在, 连接 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ 两点的直线交曲线 $y = f(x)$ 于 $C(c, f(c))$ 且 $a < c < b$, 试证在 (a, b) 内至少有一点 ξ 使得 $f''(\xi) = 0$.

27. (本题满分10分)

设 $\int_1^{+\infty} \left(\frac{x^2 + bx + a}{x^2 + ax} - 1 \right) dx = 1$, 求常数 a, b .

28. (本题满分10分)

已知两直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$ 和 $L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$. 求过 L_1 且平行于 L_2 的平面的方程.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数在一点处的连续性和可导性的知识点.

【应试指导】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$, 所以函数在 $x = 0$ 处连续; 又因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x}$ 不存在, 所以函数在 $x = 0$ 处不可导.

2.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了曲线的渐近线的知识点.

【应试指导】 因 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = 1$, 所以 $y = 1$ 为水平渐近线. 又因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = \infty$, 所以 $x = 0$ 为铅直渐近线.

3.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了洛必达法则的知识点.

【应试指导】 因为 $x \rightarrow 0$ 时分母极限为 0, 只有分子极限也为 0, 才有可能使分式极限为 6, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} [(1+x)(1+2x) \cdot (1+3x) + a] = 1 + a = 0$, 解得 $a = -1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + 11x^2 + 6x^3}{x} = 6$.

4.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了两个无穷小量阶的比较的知识点.

【应试指导】 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sin^2 t dt}{x^3 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin^2 x) \cdot \cos x}{3x^2 + 4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2 + 4x^3}$ (等价无穷小代换) $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2 + 4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3 + 4x} = \frac{1}{3}$. 故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同价但非等价无穷小.

5.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了已知积分函数求原函数的知识点.

【应试指导】 因为 $f(x^2) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$, 所以 $f(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{\sqrt{x}}{2}}$.

6.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了曲线围成的面积的知识点.

【应试指导】 设 (x_0, y_0) 为切点, 则切线方程为 $y = e^{x_0} x$, 联立 $\begin{cases} y_0 = e^{x_0} x_0, \\ y_0 = e^{x_0}, \end{cases}$ 得 $x_0 = 1, y_0 = e$, 所以切线方程为 $y = ex$. 故所求面积为 $\int_0^1 (e^x - ex) dx$.

7.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了一元函数在一点处的一阶导数的知识点.

【应试指导】 $f(x) = \cos x, f'(x) = -\sin x, f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$.

8.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了莱布尼茨公式的知识点.

【应试指导】 由莱布尼茨公式, 得 $(e^x \sin x)''' = (e^x)''' \sin x + 3(e^x)''(\sin x)' + 3(e^x)'(\sin x)'' + e^x(\sin x)''' = e^x \sin x + 3e^x \cos x + 3e^x(-\sin x) + e^x(-\cos x) = 2e^x(\cos x - \sin x)$.

9.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了级数的绝对收敛的知识点.

【应试指导】 由题意知, 级数收敛半径 $R \geq 2$, 则 $x = 2$ 在收敛域内部, 故其为绝对收敛.

10.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了一阶线性齐次方程的知识点.

【应试指导】 因 $f'(x) = f(x) \cdot 2$, 即 $y' = 2y$, 此为常数一阶线性齐次方程, 其特征根为 $r = 2$, 所以其通解为 $y = Ce^{2x}$, 又当 $x = 0$ 时, $f(0) = \ln 2$, 所以 $C = \ln 2$, 故 $f(x) = e^{2x} \ln 2$.

注: 方程 $y' = 2y$ 求解时也可用变量分离.

二、填空题

11.【答案】 $0 < x < \frac{1}{4}$

【考情点拨】 本题考查了函数的单调区间的知识点.

【应试指导】 由 $F(x) = \int_1^x \left(2 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt (x > 0)$, 则 $F'(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$. 令 $F'(x) = 0$, 得 $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$, 即 $x = \frac{1}{4}$, 故当 $0 < x < \frac{1}{4}$ 时, $F'(x) < 0, F(x)$ 单调递减.

12.【答案】 $y f''(xy) + f'(x+y) + y f''(x+y)$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} f(xy) + \frac{1}{x} f'(xy) \cdot y + y f'(x+y), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2} f'(xy) \cdot x + \frac{1}{x} f'(xy) + \frac{y}{x} f''(xy) \cdot x + f'(x+y) + y f''(x+y) = y f''(xy) + f'(x+y) + y f''(x+y)$.

13.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了利用极坐标求二重积分的知识点.

【应试指导】 用极坐标计算. $I = \iint_D x^2 y dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 \cos^2 \theta \sin \theta \cdot r dr = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^a r^4 dr = -\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\cos \theta \int_0^a r^4 dr = -\left(\frac{1}{3} \cos^3 \theta\right) \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{5} r^5\right) \Big|_0^a = 0$.

注: 本题也可用对称性求出. 由于 D 为 $x^2 + y^2 \leq a$ 关于 x 轴对称, 且 $f(x, y) = x^2 y$ 关于 y 为奇函数, 则 $\iint_D x^2 y dx dy = 0$.

14.【答案】 $\frac{31}{16}, 2$

【考情点拨】 本题考查了函数的最大、最小值的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = 3ax^2 - 12ax, f'(x) = 0$, 则 $x = 0$ 或 $x = 4$, 而 $x = 4$ 不在 $[-1, 2]$ 中, 故舍去. $f''(x) = 6ax - 12a, f''(0) = -12a$, 因为 $a > 0$, 所以 $f''(0) < 0$, 所以 $x = 0$ 是极值点. 又因 $f(-1) = -a - 6a + b = b - 7a, f(0) = b, f(2) = 8a - 24a + b = b - 16a$, 因为 $a > 0$, 故当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 最大, 即 $b = 2$; 当 $x = 2$ 时, $f(x)$ 最小. 所以 $b - 16a = -29$, 即 $16a = 2 + 29 = 31$, 故 $a = \frac{31}{16}$.

15.【答案】 $x = -1$

【考情点拨】 本题考查了曲线的铅直渐近线的知识点.

【应试指导】 由 $y = \frac{x^2 + x - 2}{1 - x^2} = \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x)}$, 则 $\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{1+x}$ 不存在, $\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{1+x} = \frac{3}{2}$. 故铅直渐近线为 $x = -1$.

16.【答案】 > 1

【考情点拨】 本题考查了利用比较判别法求函数的敛散性的知识点.

【应试指导】 因 $\frac{1}{1+n^p} < \frac{1}{n^p}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛, 由比较判别法知 $p > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{1+n^p}$ 收敛.

17.【答案】 $\frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 4} d(x+1) = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C$.

18.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了幂级数的收敛半径的知识点.

$$\text{【应试指导】 } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{(n+1)^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 1.$$

19.【答案】 $xe^x(Asin2x+Bcos2x)$

【考情点拨】 本题考查了二元常系数微分方程的特解形式的知识点.

【应试指导】 由特征方程为 $r^2-2r+5=0$, 得特征根为 $1 \pm 2i$, 而非齐次项为 $e^x \sin 2x$, 因此其特解应设为 $y^* = Axe^x \sin 2x + Bxe^x \cos 2x = xe^x(Asin2x+Bcos2x)$.

20.【答案】 $\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了反常积分的知识点.

$$\text{【应试指导】 } \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{(1+x^2)^2} d(1+x^2) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{1+x^2} \right) \Big|_0^a = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{1+a^2} \right) = \frac{1}{2}.$$

三、解答题

$$\begin{aligned} 21. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{B \sin x + \int_0^x \cos t^2 dt}{x} \\ &= B + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} \\ &= B + \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x^2 = B + 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{A(1 - \cos 2x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2A \sin^2 x}{x^2} = 2A, \end{aligned}$$

欲使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 应有 $2A=4=B+1$, 所以 $A=2, B=3$.

22. 等式两边对 x 求导得, $e^{y^2} \cdot y' = \cos x^2 \cdot 2x + (-\sin y^2) \cdot 2yy'$,

$$\text{所以 } y' = \frac{2x \cos x^2}{e^{y^2} + 2y \cdot \sin y^2},$$

$$\text{故 } dy = \frac{2x \cos x^2}{e^{y^2} + 2y \sin y^2} dx.$$

$$\begin{aligned} 23. \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[e^x \left(1 + \frac{x}{e^x} \right) \right]^{\frac{1}{x}} \\ &= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{e^x} \right)^{\frac{e^x}{x} \cdot \frac{1}{e^x}} \\ &= e \times e = e^2. \end{aligned}$$

注:另解如下

$$\begin{aligned} \text{由于 } \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(x + e^x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + e^x)}{x}}, \\ \text{又因 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + e^x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + e^x}{x + e^x} = 2, \\ \text{所以原式} &= e^2. \end{aligned}$$

$$24. \text{由 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{F_1 + F_2 \cdot \left(-\frac{z}{x^2}\right)}{F_1 \cdot \frac{1}{y} + F_2 \cdot \frac{1}{x}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{F_1 \cdot \left(-\frac{z}{y^2}\right) + F_2}{F_1 \cdot \frac{1}{y} + F_2 \cdot \frac{1}{x}},$$

所以

$$\begin{aligned} x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{x F_1 - \frac{z}{x} F_2 - \frac{z}{y} F_1 + y F_2}{F_1 \cdot \frac{1}{y} + F_2 \cdot \frac{1}{x}} \\ &= \frac{z \left(\frac{1}{x} F_2 + \frac{1}{y} F_1 \right) - x F_1 - y F_2}{\frac{1}{y} F_1 + \frac{1}{x} F_2} \\ &= z - xy. \end{aligned}$$

25. 分离变量得 $y dy = \frac{x}{1-x^2} dx$,

$$\text{两边积分得 } \frac{1}{2} y^2 = \int \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x^2} d(1-x^2),$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} y^2 = -\frac{1}{2} \ln |1-x^2| + C_1,$$

$$\text{或 } y^2 = -\ln |1-x^2| + C.$$

26. 由题意知 $f(a)=f(b)=f(c)$, 在 (a, c) 内有一点 η_1 , 使得 $f'(\eta_1)=0$, 在 (c, b) 内有一点 η_2 , 使得 $f'(\eta_2)=0$,

这里 $a < \eta_1 < c < \eta_2 < b$, 再由罗尔定理, 知在 (η_1, η_2) 内有一点 ξ , 使得 $f''(\xi)=0$.

$$\begin{aligned} 27. \text{由 } \int_1^{+\infty} \frac{(b-a)x+a}{x^2+ax} dx &= \int_1^{+\infty} \frac{(b-a)x}{x^2+ax} dx + \int_1^{+\infty} \frac{a}{x^2+ax} dx \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{b-a}{x+a} dx + \int_1^{+\infty} \frac{a}{x^2+ax} dx \\ &= (b-a) \ln |x+a| \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{a}{x^2+ax} dx, \end{aligned}$$

由此积分收敛知, 应有 $b-a=0$, 即 $b=a$,

$$\text{所以上式} = \int_1^{+\infty} \frac{a}{x^2+ax} dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{a}{x(x+a)} dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} \right) dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{x}{x+a} \right| \Big|_1^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\ln \left| \frac{A}{A+a} \right| + \ln |1+a| \right)$$

$$= \ln |1+a|,$$

故 $\ln(1+a)=1$, 所以 $1+a=e, a=e-1$, 且 $b=e-1$.

28. 过 L_1 且平行于 L_2 的平面 π 的法线 n 应垂直于 L_1, L_2 ,

$$\text{故 } n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i - 3j + k = \{1, -3, 1\},$$

由平面过 L_1 , 故其过点 $(1, 2, 3)$,

所以平面方程为 $(x-1)-3(y-2)+(z-3)=0$,

即 $x-3y+z+2=0$.



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(一)

全真模拟(六)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.满分150分.考试时间150分钟.

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得分	评卷人

一、选择题(1~10小题,每小题4分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的 【 】
 - 充分条件
 - 必要条件
 - 充要条件
 - 以上都不对
- 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+2x}, & x \neq 0, \\ k, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 连续,则 k 等于 【 】
 - e^2
 - e^{-2}
 - 1
 - 0
- 若 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} = 5$, 则 【 】
 - $a=-9, b=14$
 - $a=1, b=-6$
 - $a=-2, b=0$
 - $a=-2, b=-5$
- 曲线 $y = \frac{e^x}{1+x}$ 【 】
 - 有一个拐点
 - 有两个拐点
 - 有三个拐点
 - 无拐点
- $\int x^2 dx =$ 【 】
 - $3x^2 + C$
 - $\frac{x^3}{3} + C$
 - $x^3 + C$
 - $\frac{x}{2} + C$

- 已知 $\int_0^k (2x-3x^2) dx = 0$, 则 $k =$ 【 】
 - 0 或 1
 - 0 或 -1
 - 0 或 2
 - 1 或 -1
- 由曲线 $y = \frac{1}{x}$, 直线 $y = x, x = 2$ 所围面积为 【 】
 - $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - x \right) dx$
 - $\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) dx$
 - $\int_1^2 \left(2 - \frac{1}{y} \right) dy + \int_1^2 (2-y) dy$
 - $\int_1^2 \left(2 - \frac{1}{x} \right) dx + \int_1^2 (2-x) dx$
- 设 $z = x^3 - 3x - y$, 则它在点 $(1, 0)$ 处 【 】
 - 取得极大值
 - 取得极小值
 - 无极值
 - 无法判定
- 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 【 】
 - 收敛
 - 发散
 - 收敛且和为零
 - 可能收敛也可能发散
- 微分方程 $y'' - 2y' = x$ 的特解应设为 【 】
 - Ax
 - $Ax+B$
 - Ax^2+Bx
 - Ax^2+Bx+C

第Ⅱ卷(非选择题,共110分)

得分	评卷人

二、填空题(11~20小题,每小题4分,共40分)

- 当 $x=1$ 时, $f(x) = x^3 + 3px + q$ 取到极值(其中 q 为任意常数), 则 $p =$ _____.
- 设 $f(x) = \int_0^x |t| dt$, 则 $f'(x) =$ _____.
- 设 $f'(x^2) = \frac{1}{x}$, 则 $f(x) =$ _____.
- 设 $f(x)$ 是连续的奇函数, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 1$, 则 $\int_{-1}^0 f(x) dx =$ _____.
- 设 $z = x^y$, 则 $dz =$ _____.
- 设 $I = \int_0^{16} dy \int_{\frac{y}{4}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$ 交换积分次序, 则有 $I =$ _____.
- 当 p _____ 时, 反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p}{1+x} dx$ 收敛.
- 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 收敛还是发散, 你的结论是 _____.
- $y \ln x dx + x \ln y dy = 0$ 的通解是 _____.
- $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解是 _____.

得 分	评卷人

三、解答题(21~28题,共70分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分8分)

设 $f(x) = \frac{(x-3)e^{\frac{1}{x-3}}}{\sin(x-3)}$, 求 $f(x)$ 的间断点.

22.(本题满分8分)

设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{2}} = a$, 且 $f'(0)$ 存在, 求 $f'(0)$.

23.(本题满分8分)

给定曲线 $y = x^3$ 与直线 $y = px - q$ (其中 $p > 0$), 求 p 与 q 为何关系时, 直线 $y = px - q$ 是 $y = x^3$ 的切线.

24.(本题满分8分)

求 $\int \frac{1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}} dx$.

25.(本题满分8分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2^n}$ 的收敛半径和收敛区间.

26.(本题满分10分)

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$.

27.(本题满分10分)

计算 $\iint_D (xe^y + x^2 y^2) dx dy$, 其中 D 是由 $y = x^2$, $y = 4x^2$, $y = 1$ 围成.

28.(本题满分10分)

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x^2} dx$.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】D

【考情点拨】 本题考查了判断函数极限的存在性的知识点.

【应试指导】 极限是否存在与函数在该点有无定义无关.

2.【答案】A

【考情点拨】 本题考查了函数在一点处的连续性的知识点.

【应试指导】 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1+2x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{3}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{3} \cdot 2} = e^2$, 又因 $f(0) = k$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 故 $k = e^2$.

3.【答案】B

【考情点拨】 本题考查了洛必达法则的知识点.

【应试指导】 因 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} = 5$, 则 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2+ax+b) = 0$, 因此 $4+2a+b=0$, 即 $2a+b=-4$ 或 $b=-4-2a$,

故 $5 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax-2a-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)+a(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2+a) = 4+a$, 所以 $a=1$, 而 $b=-6$.

4.【答案】D

【考情点拨】 本题考查了曲线的拐点的知识点.

【应试指导】 因 $y' = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$, $y'' = \frac{e^x(1+x^2)}{(1+x)^3}$, 则 y'' 在定义域内恒不等于 0, 所以无拐点.

5.【答案】B

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$.

6.【答案】A

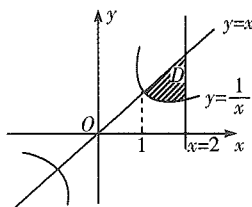
【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^k (2x-3x^2) dx = (x^2-x^3) \Big|_0^k = k^2-k^3 = k^2(1-k) = 0$, 所以 $k=0$ 或 $k=1$.

7.【答案】B

【考情点拨】 本题考查了曲线所围成的面积的知识点.

【应试指导】 曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = x, x = 2$ 所围成的区域 D 如下图所示,



则 $S_D = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) dx$.

8.【答案】C

【考情点拨】 本题考查了函数在一点处的极值的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -1 \neq 0$, 显然点 $(1, 0)$ 不是驻点, 故其处无极值.

9.【答案】D

【考情点拨】 本题考查了数项级数收敛的必要条件的知识点.

【应试指导】 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件, 但不是充分条件, 从例子 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 即可知应选 D.

10.【答案】C

【考情点拨】 本题考查了二阶常系数微分方程的特解的知识点.

【应试指导】 因 $f(x) = x$ 为一次函数, 且特征方程为 $r^2 - 2r = 0$, 得特征根为 $r_1 = 0, r_2 = 2$. 于是特解应设为 $y^* = (Ax+B)x = Ax^2+Bx$.

二、填空题

11.【答案】-1

【考情点拨】 本题考查了函数的极值的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = 3x^2 + 3p$, $f'(1) = 3 + 3p = 0$, 所以 $p = -1$.

12.【答案】|x|

【考情点拨】 本题考查了分段函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = \left(\int_0^x t dt\right)' = x$, 当 $x < 0$ 时, $f'(x) = \left[\int_0^x (-t) dt\right]' = -x$, 当 $x = 0$ 时, $f'_+(0) =$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x t dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$, 同理 $f'_-(0) = 0$, 所以 $f'(0) = 0$, 故 $f'(x) = |x|$.

13.【答案】 $\begin{cases} 2\sqrt{x} + C, & x > 0, \\ -2\sqrt{x} + C, & x < 0 \end{cases}$

【考情点拨】 本题考查了由导函数求原函数的知识点.

【应试指导】 令 $x^2 = t$, 则 $f'(t) = \frac{1}{\pm\sqrt{t}}$, 因此 $f(t) = \int f'(t) dt = \int \frac{1}{\pm\sqrt{t}} dt = 2(\pm\sqrt{t}) + C$, 所以 $f(x) =$

$\begin{cases} 2\sqrt{x} + C, & x > 0, \\ -2\sqrt{x} + C, & x < 0. \end{cases}$

14.【答案】-1

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$, 因此 $\int_{-1}^0 f(x) dx = -\int_0^1 f(x) dx = -1$.

15.【答案】 $yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 $z = x^y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$, 所以 $dz = yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy$.

16.【答案】 $\int_0^4 dx \int_x^{4x} f(x, y) dy$

【考情点拨】 本题考查了交换积分次序的知识点.

【应试指导】 $I = \int_0^{16} dy \int_{\frac{y}{4}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$ 的积分区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 16, \frac{y}{4} \leq x \leq \sqrt{y}\} =$

$\{(x, y) | 0 \leq x \leq 4, x^2 \leq y \leq 4x\}$, 所以 $I = \int_0^4 dx \int_{x^2}^{4x} f(x, y) dy$.

17.【答案】 < 0

【考情点拨】 本题考查了反常积分的敛散性(比较判别法)的知识点.

【应试指导】 若 $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x} dx$ 收敛, 必有 $p < 0$, 因如果 $p \geq 0$, 则当 $x > 1$ 时, $\frac{x^p}{1+x} > \frac{1}{1+x}$, 而 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx$ 发散, 故 $p < 0$ 时, $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x} dx$ 收敛.

18.【答案】发散

【考情点拨】 本题考查了级数的敛散性(比较判别法)的知识点.

【应试指导】 由 $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散, 所以原级数发散.

19.【答案】 $(\ln x)^2 + (\ln y)^2 = C$

【考情点拨】 本题考查了分离变量微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 分离变量得 $\frac{\ln x}{x} dx + \frac{\ln y}{y} dy = 0$, 积分得 $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + \frac{1}{2}(\ln y)^2 = C_1$, 即 $(\ln x)^2 + (\ln y)^2 = C$.

20.【答案】 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

【考情点拨】 本题考查了二阶常系数微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 由 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的特征方程为 $r^2 - 2r - 3 = 0$, 得特征根为 $r_1 = 3, r_2 = -1$, 所以方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$.

三、解答题

21. 由题意知, 使 $f(x)$ 不成立的 x 值, 均为 $f(x)$ 的间断点. 故 $\sin(x-3) = 0$ 或 $x-3 = 0$ 时 $f(x)$ 无意义, 则间断点为

$x-3=k\pi(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.
即 $x=3+k\pi(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

$$22. \because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{2}} = a,$$

$$\therefore a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x) - f(0)] - [f\left(\frac{x}{3}\right) - f(0)]}{\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{\frac{x}{2}} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{x}{3}\right) - f(0)}{\frac{x}{2}}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{x}{3}\right) - f(0)}{\frac{x}{3}}$$

$$= 2f'(0) - \frac{2}{3}f'(0) = \frac{4}{3}f'(0),$$

$$\therefore f'(0) = \frac{3}{4}a.$$

注:导数的定义是 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, 只要符合这个结构特征, 其极限若存在就是 $f'(x_0)$.

23. 由题意知, 在切点处有 $x^3 = px - q$,
两边对 x 求导得 $3x^2 = p$,

$$\text{所以 } x^3 = 3x^3 - q, \text{ 即 } x = \sqrt[3]{\frac{q}{2}},$$

$$\text{因此 } p = 3\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}\right)^2}.$$

$$24. \int \frac{1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}} dx = \int \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{-2} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\int \sqrt{x-1} dx + \int \sqrt{x+1} dx \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \right] + C$$

$$= -\frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$25. \text{ 令 } x^2 = t, \text{ 先考虑 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{2^n},$$

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{2^n}$ 的收敛半径 $R = 2$,

$\therefore$ 当 $t < 2$ 即 $x^2 < 2$, 即 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ 时原级数收敛,

当 $x = \sqrt{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \cdot (\sqrt{2})^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 发散,

当 $x = -\sqrt{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \cdot (-\sqrt{2})^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 发散,

$\therefore$ 原级数的收敛区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

26. 记 $y = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$, 则 $\ln y = \frac{1}{x} \ln \frac{\sin x}{x}$,

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin x}{2}\right) = 0,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$.

注:另解如下:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln \frac{\sin x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x}},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} \sin x\right) = 0,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$.

注:在解题中应尽量将题目化简, 要大胆使用等价无穷小的代换.

27. 因 D 关于 y 轴对称, 且 xe^y 是关于 x 的奇函数, $x^2 y^2$ 是关于 x 的偶函数,

$$\text{则 } I = \iint_D x e^y dx dy + \iint_D x^2 y^2 dx dy$$

$$= 0 + \iint_D x^2 y^2 dx dy,$$

$$\therefore I = 2 \int_0^1 dy \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} x^2 y^2 dx$$

$$= 2 \int_0^1 y^2 \left(\frac{1}{3} x^3 \Big|_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} \right) dy$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 \left(y^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{8} y^{\frac{7}{2}} \right) dy$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{7}{8} y^{\frac{7}{2}} dy$$

$$= \frac{14}{24} \times \frac{2}{9} \left(y^{\frac{9}{2}} \Big|_0^1 \right)$$

$$= \frac{7}{54}.$$

注: $\iint_D x e^y d\sigma = 0$ 是利用了对称性, 由 D 关于 y 轴对称, xe^y 是 x 的奇函数, 故积分为零.

$$28. \because 0 < \frac{1}{1+x^2} < 1,$$

$$\therefore 0 < \frac{x^n}{1+x^2} < x^n,$$

$$\text{故 } 0 < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x^2} dx < \int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx = \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] = 0,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x^2} dx = 0.$$