

第一章 极限, 连续

第一节 函数

1, 函数定义域的求法

- (1) 分式的分母不能为 0
- (2) 平方根的底数大于等于 0
- (3) 对数的真数大于 0

2, 函数的性质

- (1) 单调性
- (2) 奇偶性
- (3) 周期性
- (4) 有界性

3, 函数的分类

- (1) 复合函数
- (2) 分段函数
- (3) 隐函数

4, 复合函数的分解

$$y = \ln \sin x = \begin{cases} y = \ln u \\ u = \sin x \end{cases}$$

$$y = \sin(2x-1) = \begin{cases} y = \sin u \\ u = 2x-1 \end{cases}$$

$$y = e^{-x} = \begin{cases} y = e^u \\ u = -x \end{cases}$$

【例 1】求函数 $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ 定义域

【解析】

$$4-x^2 \geq 0$$

$$x^2 \leq 4$$

$$-2 \leq x \leq 2$$

第二节 极限

1, 极限的定义 (了解)

2, 求极限的方法

- (1) 直接代人 (只要有意义)
- (2) 洛必达法则
- (3) 无穷小和无穷大的性质
- (4) 三种特例
- (5) 两个重要极限
- (6) 等价无穷小的替换

【例 2】求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} =$ 【18 年真题】

【解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{\cos 0} = 0$$

【例 3】求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+1}$ 【09 年真题】

【解析】

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+1} = 0$$

无穷小和无穷大的性质

无穷小的定义; 在自变量的某个变化过程中极限为零的函数称为无穷小量, 简称无穷小

无穷大的定义; 在自变量的某个变化过程中极限为无穷大的函数称为无穷大量, 简称无穷大

如;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \therefore \frac{1}{x}$$

是无穷小

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty, \therefore \frac{1}{x}$$

是无穷大

无穷小量与无穷大量的关系; 无穷小和无穷大互为倒数关系

无穷小量的性质; 无穷小量与有界量的乘积是无穷小量

($\sin x, \cos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$)

【例 4】求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x$$

【解析】因为

而当 $x \rightarrow \infty$, $\frac{1}{x}$ 是无穷小量,
 $\sin x$ 是有界函数

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

所以

【例 5】求极限 $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \sin \frac{1}{x-2}$

【解析】因为 $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$

所以 $x-2$ 是无穷小

又因为 $\sin \frac{1}{x-2}$ 是有界函数

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \sin \frac{1}{x-2} = 0$$

所以

三种特例

通过因式分解

【例 6】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ 【06 年真题】

【解析】

原式=

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

通过分子或分母有理化

【例7】 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ 【07年真题】

【解析】

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(\sqrt{x^2+1}+1)} = 0 \end{aligned}$$

分子，分母同除以指数最高项

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots} \begin{cases} 0; m < n \\ \frac{a_0}{b_0}; m = n \\ \infty; m > n \end{cases}$$

特点 (1) $x \rightarrow \infty$

(2) 有理分式

【例8】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{7x^3 + 4x^2 - 1} &= \frac{2}{7} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5}{7x^3 + 4x^2 - 1} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{4x^2 - 1} &= \infty \end{aligned}$$

两个重要极限

第一重要极限; $\lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$

注意：三统一原则

$u(x)$ 要趋近 0

【例 9】 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sin(x-2)}$

【17 年真题】

【解析】

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sin(x-2)} = 1$$

【例 10】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x}{2x} =$

【16 年真题】

A: $\frac{2}{3}$ B: 1 C: $\frac{3}{2}$ D: 3

【答案】 C

【解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{3}{2}$$

第二重要极限

$$\lim (1 + A)^B = e$$

特点 (1) $1+$

(2) $AB=1$

【例 11】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$

【14 年真题】

A; e^{-2} B; e^{-1} C; e D; e^2

【答案】D

【解析】

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]^2 = e^2$$

【例 12】 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x}}$

【18 年真题】

【解析】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x}} &= \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{-\frac{1}{3x}} \right]^{-3} \\ &= e^{-3} \end{aligned}$$

【例 13】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$

【02 年真题】

【解析】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+x}{x} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{\frac{x}{2}} \right]^2 = e^2 \end{aligned}$$

无穷小的比较

设 $\lim A = 0; \lim B = 0$

$\lim \frac{A}{B} = 0;$ A 较 B 为高阶无穷小,

$\lim \frac{A}{B} = \infty;$ A 较 B 为低阶无穷小,

$\lim \frac{A}{B} = C \neq 0;$ A 与 B 为同阶无穷小,

$\lim \frac{A}{B} = 1;$ A 与 B 为等阶无穷小,

等价无穷小的替换定理

设当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$

$$\beta_1(x) \sim \beta_2(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta_1(x)}{\alpha_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta_2(x)}{\alpha_2(x)}$$

$$\sin x \sim x \quad \tan x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x \quad \arctan x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$\ln(1+x) \sim x \quad e^x - 1 \sim x$$

【例 14】当 $x \rightarrow 0$ 时下列变量是无穷小量

【17 年真题】

$$A; \frac{1}{x^2} \quad B; 2^x \quad C; \sin x \quad D; \ln(x+e)$$

【答案】C

【解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

【例 15】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$ 【15 年真题】

【解析】

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+1}$$

【例 16】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{\sin x}$ 【16 年真题】

【解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x}$$

$$= -1$$

【例 17】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$ 【15 年真题】

【解析】

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

第三节 连续

1、函数在一点连续的定义

(1) 函数 $Y=f(x)$ 在点 x_0 有定义

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\text{【例 18】 设 } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 1 \\ a, & x > 1 \end{cases} \text{ 在 } x=1 \text{ 处连续则 } a=$$

【03 年真题】

A; -2 B; -1 C; 1 D; 2

【答案】 B

【解析】

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 2) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} a = a \end{cases} \Rightarrow a = -1$$

$$\text{【例 19】 设 } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2a, & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x}, & x > 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续则 } a=$$

【10 年真题】

【解析】

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 2a) = 2a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore 2a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\text{【例 20】 设 } f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处}$$

【07 年真题】

- A; $f(x)$ 无定义 B; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在
 C; $f(x)$ 连续 D; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 但不连续

【答案】B

【解析】

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1 \end{cases}$$

【例 21】设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan ax}{x}, & x < 0 \\ x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续则 $a=$

【02 年真题】

【解析】

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan ax}{x} = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2) = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 2$$

【例 22】设 $f(x) = \begin{cases} \frac{3 \sin x}{x}; & x < 0 \\ 3x + a; & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续则 $a=$

【18 年真题】

【解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x + a) = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3 \sin x}{x} = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 3$$

【例 23】设 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{2}; & x \neq 0 \\ a; & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续则 $a=$

【17 年真题】

【解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

2、函数的间断点

如果函数 $Y=f(x)$ 在点 x_0 不连续, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

判断间断点的方法

- (1) 没有定义的点
- (2) 极限不存在的点
- (3) 极限值不等于函数值的点

【例 24】函数 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$ 的间断点是

【08 年真题】

【解析】 $x = 3$

【例 25】函数 $f(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{x-1}$ 的间断点是

【07 年真题】

【解析】 $x = 1$

3、渐近线

(1) 水平渐近线; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Rightarrow y = a$

(2) 垂直渐近线; $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty \Rightarrow x = b$

【例 26】曲线 $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$ 水平渐近线方程是

【17 年真题】

【解析】

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

4、介值定理主要用于证明方程根的存在性
设有方程 $f(x)=0$ ，如果 $f(a)f(b)<0$ ，
则该方程在开区间 (a, b) 内至少有一实根
(了解)