

第七章 常微分方程

第一节 一阶微分方程

一、基本概念

【例1】一曲线经过点 $(1,2)$ ，且任意一点

(x,y) 处的切线的斜率等于该点的横坐标，

试确定此曲线的方程。

名师解析：

解 $y' = x$ ，不难得出 $y = \frac{x^2}{2} + c$ ；

$$y(1) = 2 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

$$\therefore y = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$$

微分方程：含有未知函数的导数（或微分）的等式；

$$(1) y' = x^2 + y; \quad (2) x(y')^2 - 2y' + 4x;$$

$$(3) xy'' - 2(y')^3 + 5xy = 0; \quad (4) \cos(y'') + \ln y = x + 1.$$

常微分方程：未知函数是一元函数的微分方程；

方程的“阶”：微分方程中未知函数导数的最高阶数

方程的解 代入微分方程使得方程两端恒等的函数。

通解 方程解中含有与方程阶数相同个数的任意常数；

初始条件：用来确定方程通解中任意常数的条件；

特解：方程通解中任意常数被确定之后的解；

线性常微分方程：未知函数及其各阶导数均为一次

的常微分方程。

【例2】下列方程是一阶线性微分方程的是

$$A, (y')^2 + 2y = x \quad B, y' + 2y^2 = x$$

$$C, y' + y = x \quad D, y'' + y' = x$$

【05年真题】

名师解答： C

名师解析：根据一阶线性微分方程的定义可得

【例3】微分方程 $(y'')^2 + (y')^3 + \sin x = 0$ 的阶数是

【10年真题】

A, 1 B, 2 C, 3 D, 4

名师解答： B

名师解析：根据微分方程阶数的定义

二 可分离变量的微分方程

形如 $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ 的方程.

其中 $f(x)$ 只是 x 的函数,

$g(y)$ 只是 y 的函数。

解可分离变量的方法是：

第一步 分离变量

将方程写成 $g(y)dy = f(x)dx$ 的形式；

第二步 两边积分

$\int g(y)dy = \int f(x)dx$, 得 $G(y) = F(x) + C$;

第三步 求出由 $G(y) = F(x) + C$ 所确定的函数

【例4】求微分方程 $\frac{dy}{dx} = 2xy$ 的通解

名师解析：

解分离变量得 $\frac{dy}{y} = 2xdx$

两端积分得 $\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx$

$\ln y = x^2 + C$

方程的通解 $y = Ce^{x^2}$

【例 5】求微分方程 $y' - 3y = 0$ 的通解

【03 年真题】

名师解析：

$$y' = 3y$$

$$\frac{dy}{dx} = 3y$$

$$\frac{1}{y} dy = 3dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 3dx \Rightarrow y = ce^{3x}$$

三、一阶线性微分方程

形如： ~~$y' + p(x)y = q(x)$~~

1 一阶线性齐次微分方程： ~~$y' + p(x)y = 0$~~

通解 ~~$y = ce^{-\int p(x)dx}$~~

2 一阶线性非齐次微分方程： ~~$y' + p(x)y = q(x)$~~

通解为 ~~$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right)$~~

【例 6】求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$ 的通解

名师解析：

$$P(x) = \frac{1}{x}, Q(x) = \frac{\sin x}{x}, \text{ 于是}$$

$$y e^x \left(\int \frac{\sin x}{x} e^x dx \right)$$

$$= e^x \left(\int \frac{\sin x}{x} e^x dx \right)$$

$$= \frac{1}{x} (-\cos x)$$

【例 7】求微分方程 $x^2 y' + xy + 1 = 0$ 在 $y(2) = 1$ 的特解
名师解析：

$$\text{解： } y' + \frac{1}{x} y = -\frac{1}{x^2}$$

$$\text{其中 } P(x) = \frac{1}{x}, Q(x) = -\frac{1}{x^2},$$

$$y e^{\int \frac{1}{x} dx} = \int -\frac{1}{x^2} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C$$

$$= e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int -\frac{1}{x^2} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right)$$

$$= e^{-\ln x} \left(\int -\frac{1}{x^2} e^{\ln x} dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(\int -\frac{1}{x^2} x dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{x} (-\ln x + C)$$

$$\text{由初始条件 } y(2) = 1, \text{ 得 } C = 2 + \ln 2$$

$$\text{满足初始条件的特解为 } y = \frac{-\ln x + 2 + \ln 2}{x}.$$

【例 8】求微分方程 $y' + \cos xy = e^{-\sin x}$ 的通解

【07 年真题】

名师解析:

$$\begin{aligned}
 &= e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int \frac{\sin x}{x} dx + C \right) \\
 &= e^{\ln x} \left(\int \frac{\sin x}{x} dx + C \right) \\
 &= x \left(\int \frac{\sin x}{x} dx + C \right)
 \end{aligned}$$

【例9】设函数 $y=f(x)$ 由微分方程 $\begin{cases} xy' + y = 2x \\ y(1) = 0 \end{cases}$ 确定

【03年真题】

- (1) 求函数 $y=f(x)$ 的表达式
- (2) 讨论函数 $y=f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的单调性

名师解析:

$$(1) \quad y' + \frac{1}{x}y = 2$$

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int 2e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(\int 2x dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{x} (x^2 + C) = x + \frac{C}{x}$$

$$y|_{x=1} = 0 = 1 + C \Rightarrow C = -1$$

$$y = x - \frac{1}{x}$$

$$(2) \quad y' = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$$

单调递增

【例 10】设函数 $y=f(x)$ 上任一点 (x, y) 的切线的斜率是 $\frac{y}{x} + x^2$

且该曲线经过点 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

- (1) 求函数 $y=f(x)$ 的表达式
- (2) 求由曲线 $y=f(x)$, $y=0$, $x=1$ 所围图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V

【02 年真题】

名师解析：

$$(1) \quad y' = \frac{y}{x} + x^2$$

$$y' - \frac{y}{x} = x^2$$

$$y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int x^2 e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + c \right)$$

$$= x \left(\int x dx + c \right) = x \left(\frac{1}{2} x^2 + c \right)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} x^3$$

$$(2) \quad V = \int_0^1 \pi \left(\frac{1}{2} x^3 \right)^2 dx = \frac{\pi}{4} \frac{1}{7} x^7 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{28}$$

【例 11】求微分方程 $y' - \frac{1}{x} y = x$ 在 $y(1) = 0$ 的特解

【04 年真题】

名师解析：

$$y = e^{\int x} \left(\int x e^{-\int x} dx + c \right)$$

$$= x \left(\int x \frac{1}{x} dx + c \right)$$

$$= x(x + c)$$

$$y|_{x=1} = 0 = 1 + c \Rightarrow c = -1$$

$$y = x(x-1) = x^2 - x$$

【例 12】求微分方程 $y' = 3x^2$ 的通解

【16 年真题】

名师解析：

$$y = \int 3x^2 dx = x^3 + c$$

【例 13】求微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = 2 \ln x$ 的通解 【18 年真题】

名师解析：

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int (2 \ln x) e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + c \right)$$

$$= e^{\ln x} \left(\int (2 \ln x) e^{-\ln x} dx + c \right)$$

$$= x \left(\int 2 \frac{1}{x} \ln x dx + c \right)$$

$$= x \left(2 \int \ln x d \ln x + c \right)$$

$$= x(\ln^2 x + c)$$

第二节 常系数线性微分方程

一、二阶常系数线性微分方程

齐次 $y'' + py' + qy = 0$

非齐次 $y'' + py' + qy = f(x)$

二、线性微分方程解的性质

齐次的通解; $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

非齐次的通解; $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*$

三、求解二阶常系数线性齐次微分方程

求二阶常系数齐次线性微分方程

的通解步骤如下:

第一步 写出微分方程的特征方程

第二步 求出特征根 r_1 和 r_2 ;

第三步 根据 r_1 和 r_2 的三种不同情况, 写出方程的通解:

特征方程的根

通解形式

两个不等实根 $r_1 \neq r_2$

两个相等实根 $r_1 = r_2$

一对共轭复根 $r_1 = \alpha + \beta i, r_2 = \alpha - \beta i$

【例 14】求微分方程 $y'' + y' - 6y = 0$ 的通解

名师解析:

解 方程的特征方程为

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$

特征根为 $r_1 = 2, r_2 = -3$,

通解为

【例 15】求微分方程 $y'' - 4y' + 4y = 0$ 的通解

名师解析:

解 方程 ~~$y'' + 2y' + 5y = 0$~~ 的特征方程为

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0,$$

其特征根 ~~$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$~~ ,

通解为 ~~$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$~~ .

【例 16】求微分方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 的通解

名师解析:

解 特征方程为 ~~$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$~~

解得 ~~$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$~~ 故所求通解为

~~$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$~~

四、求解二阶常系数线性非齐次微分方程

通解为 ~~$y = y^* + y_h$~~

其中 y^* 是原方程的一个特解,

~~$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$$~~

是原方程所对应的齐次的通解,

$$f(x) = p_m(x)e^{\lambda x} \text{ 型}$$

特解可设为 $y^* = x^k Q_n(x)e^{\lambda x}$

$$k = \begin{cases} 0, \lambda \text{ 不是特征根} \\ 1, \lambda \text{ 是特征单根} \\ 2, \lambda \text{ 是特征重根} \end{cases}$$

【例 17】下列方程具有什么形式的特解

- (1) ~~$y'' + 5y' + 6y = 3e^x$~~
 (2) ~~$y'' + 5y' + 6y = 3e^{-2x}$~~
 (3) ~~$y'' + 2y' + y = e^{-x}$~~

名师解析:

解 (1) 因 $\lambda=3$ 不是特征方程

~~$r^2 + 5r + 6 = 0$~~ 的根,

故方程具有特解形式: ~~$y^* = Ae^x$~~

(2) 因 $\lambda = -2$ 是特征方程

$r^2 + 5r + 6 = 0$ 的单根,

特解形式: $y^* = x(b_0x + b_1)e^{-2x}$

(3) 因 $\lambda = -1$ 是特征方程

$r^2 + 2r + 1 = 0$ 的二重根,

特解形式: $y^* = x^2(b_0x^2 + b_1x + b_2)e^{-x}$

【例 18】求 $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$ 的特解

名师解析:

解 其中 ~~$\lambda = 3$~~ $\lambda =$

特征方程为 ~~$r^2 - 2r - 3 = 0$~~

特征根为 ~~$r_1 = 1, r_2 = 3$~~

由于 $\lambda = 0$ 不是特征方程的根,

所以就设特解为 $y^* = bx + c$

得 $-3b = 1$

比较系数得 $\begin{cases} -3b = 1 \\ -2b - 3c = 1 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} b = -1/3 \\ c = 1/3 \end{cases}$ 所求特解为 $y^* = -x/3 + 1/3$

【例 19】求微分方程 $y'' - 2y' + y = e^{-x}$ 的通解

【13 年真题】

名师解析：

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

$$(r-1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$$

$$Y = (C_1x + C_2)e^x$$

特解是 $y^* = Ae^{-x}$ 代入原方程

$$Ae^{-x} + 2Ae^{-x} + Ae^{-x} = e^{-x}$$

$$A = \frac{1}{4} \Rightarrow y^* = \frac{1}{4}e^{-x}$$

$$y = (C_1x + C_2)e^x + \frac{1}{4}e^{-x}$$

【例 20】求微分方程 $y'' + y = x + e^x$ 的通解

名师解析：

解 特征方程为 $r^2 + 1 = 0$

特征根为 $r_1 = i, r_2 = -i$

齐次方程的通解为 $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

观察可得, $y' + y = e^x$ 的一个特解为 $y_1^* = x$

$y' + y = e^x$ 的一个特解为 $y_2^* = \frac{1}{2}e^x$.

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + \frac{1}{2}e^x$$

【例 21】求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = e^x$ 的通解

【14 年真题】

名师解析:

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

$$(r+1)(r+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = -2 \end{cases}$$

$$Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

特解是 $y^* = Ae^x$ 代入原方程

$$Ae^x + 3Ae^x + 2Ae^x = e^x$$

$$A = \frac{1}{6} \Rightarrow y^* = \frac{1}{6}e^x$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{6}e^x$$

【例 22】求微分方程 $y'' - y' - 2y = e^x$ 的通解

【16 年真题】

名师解析:

$$r^2 - r - 2 = 0$$

$$(r - 2)(r + 1) = 0$$

$$r_1 = 2, r_2 = -1$$

$$Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

特解是 $y^* = Ae^x$

代入原方程

$$Ae^x - Ae^x - 2Ae^x = e^x$$

$$A = -\frac{1}{2}$$

$$y = Y + y^* = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} e^x$$