

### 第三章 一元函数积分学

#### 第一节 不定积分

##### 一、不定积分的概念和性质

1、原函数；如果  $F'(x) = f(x)$  那么  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数。

如；  $(\sin x)' = \cos x$ ,

所以  $\sin x$  是  $\cos x$  的一个原函数

$(\sin x + 3)' = \cos x$ ,

所以  $\sin x + 3$  是  $\cos x$  的一个原函数

2、不定积分；求函数  $f(x)$  的全体原函数，记作

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

3、不定积分几何意义（忽略）

4、原函数存在定理（忽略）

##### 二、不定积分的性质（体现了微分和积分互为逆运算）

$$(1) \left( \int f(x) dx \right)' = f(x)$$

$$(2) \int f'(x) dx = f(x) + c$$

$$(3) d \int f(x) dx = f(x) dx$$

$$(4) \int df(x) = f(x) + c$$

【例1】  $y = e^{2x}$  的原函数是 【15年真题】

- A,  $e^x$       B,  $\frac{1}{2}e^{2x}$   
C,  $e^{2x}$       D,  $2e^{2x}$

名师解答： B

名师解析：

$$\left( \frac{1}{2} e^{2x} \right)' = e^{2x}$$

【例2】

已知  $f(x) = \sin x$ ，则  $\int f'(x) dx =$

A,  $\sin x + c$       B,  $\cos x + c$   
 C,  $-\sin x + c$       D,  $-\cos x + c$

【03年真题】

名师解答：A

名师解析：

$$\int f'(x)dx = f(x) + c$$

【例3】

已知  $x^2$  是  $f(x)$  的一个原函数，则  $f(x) =$

【02,07年真题】

名师解析：

$$f(x) = (x^2)' = 2x$$

### 三、求不定积分

1 直接积分法；包括基本公式和性质

(1) 基本公式

$$1) \int k dx = kx + c (k \neq 0)$$

$$2) \int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c (x \neq -1)$$

$$3) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$5) \int e^x dx = e^x + c$$

$$6) \int \sin x dx = -\cos x + c (k \neq 0)$$

$$7) \int \cos x dx = \sin x + c (x \neq -1)$$

$$8) \int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$9) \int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

$$10) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$11) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

(2) 基本性质

$$1) \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$2) \int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

【例4】求不定积分  $\int x\sqrt{x}dx$

名师解析：

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x}dx &= \int xx^{\frac{1}{2}}dx \\&= \int x^{\frac{3}{2}}dx \\&= \frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C\end{aligned}$$

【例5】  $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right)dx =$

【10年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned}\int \left(1 - \frac{1}{x}\right)dx &= \int dx - \int \frac{1}{x}dx \\&= x - \ln|x| + c\end{aligned}$$

【例6】  $\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx =$

【08年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx &= 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\&= 2\arcsin x + c\end{aligned}$$

## 2、换元积分法

### (1) 第一换元积分法

$$\begin{aligned}
 & \int g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx \\
 &= \int g[\varphi(x)]d\varphi(x) \\
 &= \int g(u)du \\
 &= F(u) + C \\
 &= F[\varphi(x)] + C
 \end{aligned}$$

【例 7】  $\int (2x+1)^{10} dx =$

名师解析：

$$\int (2x+1)^{10} dx = \frac{1}{2} \int (2x+1)^{10} d(2x+1)$$

$$= \frac{1}{2} \int u^{10} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{11}}{11} + C$$

$$= \frac{1}{22} (2x+1)^{11} + C$$

【例 8】  $\int \frac{1}{3+2x} dx =$

名师解析：

$$\int \frac{1}{3+2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{3+2x} d(3+2x)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln|3+2x| + C$$

【例 9】  $\int x e^{x^2} dx =$  【04 年真题】

名师解析：

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u du$$

$$\underline{\underline{x^2 = u}} \quad \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C$$

$$\underline{\underline{u = x^2}} \quad \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

【例 10】  $\int x \sqrt{1-x^2} dx =$

名师解析：

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \sqrt{1-u} du \\ &= \frac{1}{3} (1-u)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

【例 11】  $\int \frac{\ln x}{x} dx =$

名师解析：

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x} dx &= \int \ln x d \ln x \\ &= \int u du \\ &= \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C \end{aligned}$$

【例 12】  $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

【15 年真题】

名师解析：

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{1+e^x} d(1+e^x)$$

$$= \int \frac{1}{u} du = \ln(1+e^x) + C$$

【例 13】  $\int \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx$

名师解析：

$$\int \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx = \int \sin \left( \frac{1}{x} \right) d\left( \frac{1}{x} \right)$$

$$= -\cos \left( \frac{1}{x} \right) + C$$

【例 14】  $\int \cos^2 x dx$

名师解析：

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left( \int dx + \int \cos 2x dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x)$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C ;$$

【例 15】  $\int \frac{1}{x+x^2} dx$

【10 年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{1}{x+x^2} dx \\
 &= \int \frac{1}{x(1+x)} dx \\
 &= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{1+x} dx \\
 &= \ln|x| - \ln|1+x| + c
 \end{aligned}$$

【例 16】  $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

【15 年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned}
 \int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int e^{-\sqrt{x}} d\sqrt{x} \\
 &= -2 \int e^{-\sqrt{x}} d(-\sqrt{x}) \\
 &= -2e^{-\sqrt{x}} + c
 \end{aligned}$$

(2) 第二换元积分法

解决对象；被积函数含有根号

解决思路；去掉根号

解决方法；简单根式代换

【例 17】  $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$

名师解析：

解令变量  $t=\sqrt{x}$  则  $x=t^2$

从而微分  $dx=2tdt$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx &= \int \frac{1}{t^2+t} \cdot 2tdt \\
 &= 2 \int \frac{1}{t+1} dt = 2\ln|t+1| + C \\
 &= 2\ln(\sqrt{x}+1) + C
 \end{aligned}$$

3、分部积分法

解决对象(其中  $m, n$  都是正整数).

$$x^m \sin x \quad x^n \cos x$$

$$x^m \sin x \quad x^n \cos x$$

$$x^m e^x \quad x^n \ln x$$

$$x^m \arcsin x \quad x^n \arccos x \quad x^m \arctan x$$

公式:  $\int u dv = uv - \int v du.$

注意: (1)  $v$  要用凑微分容易求出

(2)  $\int v du$  比  $\int u dv$  容易求

【例 18】已知  $\sin x$  是  $f(x)$  的一个原函数, 求  $\int x f'(x) dx$   
【17 年真题】

名师解析:

$$\int x f'(x) dx$$

$$= \int x df(x)$$

$$= x f(x) - \int f(x) dx$$

$$(\sin x)' = f(x)$$

$$= x \cos x - \sin x + c$$

【例 19】  $\int x \cos x dx$

【18 年真题】

名师解析:

$$\int x \cos x dx = \int \cos x \left( \frac{x^2}{2} \right)$$

$$= \frac{x^2}{2} \cos x + \int \frac{x^2}{2} \sin x dx$$



$$\int \cos x dx$$

$$= \sin x + C$$

$$= \sin x + C$$

【例 20】  $\int \ln x dx$  【04 年真题】

名师解析：

$$\int \ln x dx$$

$$= x \ln x - \int x d(\ln x)$$

$$= x \ln x - \int 1 dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

【例 21】  $\int x e^x dx$

名师解析：

$$\int x e^x dx$$

$$= x e^x - \int e^x dx$$

$$= x e^x - e^x + C$$

【例 22】  $\int x \sin 3x dx$

【01 年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned}
 \int x \sin 3x dx &= \frac{1}{9} \int 3x \sin 3x d3x \\
 &= -\frac{1}{9} \int u d \cos u \\
 &= -\frac{1}{9} (u \cos u - \int \cos u du) \\
 &= -\frac{1}{9} (u \cos u - \sin u) + C = -\frac{1}{9} (3x \cos 3x - \sin 3x) + C
 \end{aligned}$$

## 第二节 定积分

### 一、基本概念和基本性质

#### 1、定积分的定义

$$\int_a^b f(x) dx$$

其中  $f(x)$  叫做被积函数,

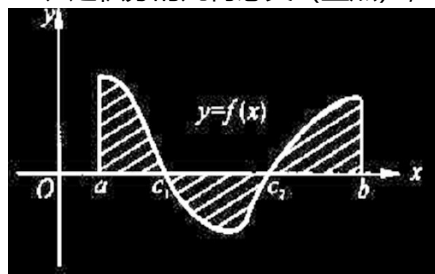
$f(x)dx$  叫做被积表达式,

$x$  叫做积分变量,

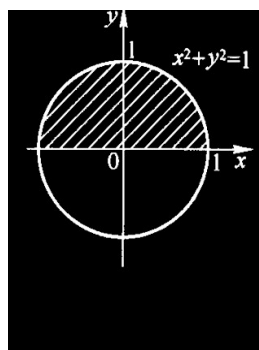
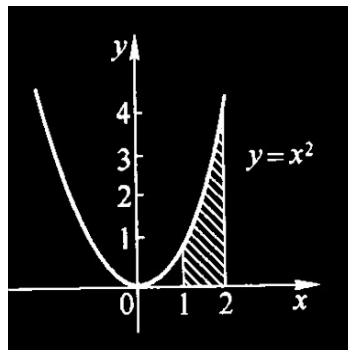
$[a, b]$  叫做积分区间.

#### 2、定积分的存在定理 (忽略)

#### 3、定积分的几何意义 (重点); 求曲边梯形的面积



【例 23】用定积分表示阴影部分的面积



名师解析:

$$(1) \int_1^2 x^2 dx,$$

$$(2) \int_1^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

【例 24】用定积分的几何意义说明

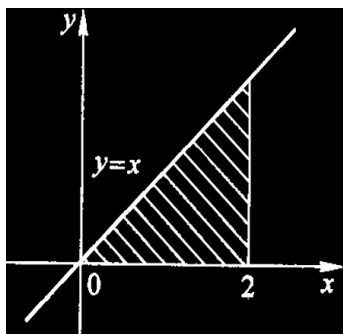
名师解析：

$$\int_0^2 x dx = 2 \text{ 成立.}$$

$\int_0^2 x dx$  的几何意义是由曲线

$y=x$ ,  $x=2$ ,  $y=0$  围成的图形的面积  $S$ ,

求得面积为  $S=2$ , 故  $\int_0^2 x dx = 2$ .



4、定积分的性质（只要关注这 6 条）

两点补充规定：(a) 当  $a=b$  时,  $\int_a^b f(x) dx = 0$

(b) 当  $a < b$  时,  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

性质 1  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

性质 2  $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$  ( $k$  为常数).

性质 3  $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$ .

性质 4：如果被积函数是奇函数，积分区间是对称的，定积分为 0

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x) dx =$$

【例 25】

【05,06,08 年真题】

名师答案： 0

名师解析： 常数的导数为 0

【例 26】  $\int_{-1}^1 x \cos x^2 dx =$

【06,08,03 年真题】

名师答案： 0

名师解析： 积分区间是对称区间，被积函数是奇函数，结果为 0

【例 27】 如果  $f(x) > 0$ , 则  $\int_a^b f(x) dx$

A  $\int_a^b f(x) dx > 0$       B  $\int_a^b f(x) dx < 0$

C  $\int_a^b f(x) dx = 0$       D 不确定

【17 年真题】

名师答案： A

名师解析： 根据定积分的定义

二、牛顿——莱布尼茨公式

1 积分上限函数

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

若函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 则函数

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

【例 28】 设函数  $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$  则  $f'(0)$

【14 年真题】

名师解析：

$$f'(x) = \left( \int_0^x e^{t^2} dt \right)'$$

$$= e^{x^2}$$

$$f'(0) = 1$$

【例 29】  $\frac{d}{dx} \int_x^5 (t^2 + e^t) dt$

名师解析：

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \int_x^5 (t^2 + e^t) dt \\ &= \frac{d}{dx} \left( - \int_5^x (t^2 + e^t) dt \right) \\ &= -(x^2 + e^x) \end{aligned}$$

【例 30】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t) dt}{x}$

名师解析：

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t) dt}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[ \int_0^x \ln(1+t) dt \right]'}{x'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = 0. \end{aligned}$$

## 2 、牛顿——莱布尼茨公式

若函数  $F(x)$  是连续函数  $f(x)$  在

区间  $[a, b]$  上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

## 三 、定积分的换元积分法和分部积分法 (忽略)

【例 31】  $\int_0^1 (2x+k)dx = 1$  则  $k =$  【17 年真题】

A -2                      B -1  
C 0                         D 1

名师解答： C

名师解析：

$$\int_0^1 (2x+k)dx = 1 \Rightarrow \left( x^2 + kx \right)_0^1 = 1$$

$$\Rightarrow 1+k = 1 \Rightarrow k = 0$$

【例 32】  $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx =$  【15 年真题】

名师解析：

$$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx = \int_1^e (1+\ln x) d(1+\ln x)$$

$$= \frac{1}{2} (1+\ln x)^2 \Big|_1^e = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

【例 33】  $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx =$

【06 年真题】

名师解析：

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2)$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

【例 34】  $f(x) = \begin{cases} 2x; 0 < x \leq 1 \\ 5; 1 < x \end{cases}$  求  $\int_0^2 f(x) dx$

名师解析：

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (2-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx$$

$$= \int_0^1 2 dx - \int_0^1 x dx + \int_1^2 x dx - \int_1^2 1 dx = 6.$$

【例 35】  $\int_0^1 |2x-1| dx =$

名师解析：

$$\text{因为 } |2x-1| = \begin{cases} 1-2x, & x \leq \frac{1}{2} \\ 2x-1, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |2x-1| dx &= \int_0^{1/2} (1-2x) dx + \int_{1/2}^1 (2x-1) dx \\ &= (x-x^2) \Big|_0^{1/2} + (x^2-x) \Big|_{1/2}^1 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【例 36】  $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx =$

【17 年真题】

名师解析：

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= \int \frac{2t dt}{1+t} = 2 \int \frac{(t+1)-1}{1+t} dt \\ &= 2 \left( \int dt - \int \frac{1}{1+t} dt \right) = 2 \left( \sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x}) \right) + c \end{aligned}$$

$$\text{原式} = 2(2 - \ln 3)$$

【例 37】  $\int_0^2 x e^{x^2} dx =$

名师解析：

$$\begin{aligned} \int_0^2 x e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^2 e^{x^2} dx^2 \\ &= \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} (e^4 - 1) \end{aligned}$$

解二  $\int_0^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 e^{x^2} dx^2$

$$\begin{aligned} \text{令 } u &= x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{u} \\ dx = \frac{1}{2\sqrt{u}} du \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 e^u du \\ &= \frac{1}{2} (e^4 - 1) \end{aligned}$$

【例 38】  $\int_1^e \ln x dx =$

名师解析：

$$\int_1^e \ln x dx$$

$$= \int_1^e \frac{1}{x} dx$$

【例 38】  $\int_0^\pi x \sin x dx =$

名师解析：



$$\int_0^{\pi} x \sin x = \int_0^{\pi} x (-\cos x)$$

$$= -\int_0^{\pi} x \cos x$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

#### 四、无穷区间上的反常积分

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx$$

【例 39】  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx =$

名师解析：

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) - (-e^0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) + 1$$

$$= 1$$

【例 40】  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx =$

【17 年真题】

名师解析：

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

### 第三节 定积分的应用

#### 一、求平面图形的面积

1, 利用定积分的几何意义

2, 利用微元法

(1) 根据具体问题, 选取一个积分变量,

如  $x$  为积分变量, 在它的变化区间

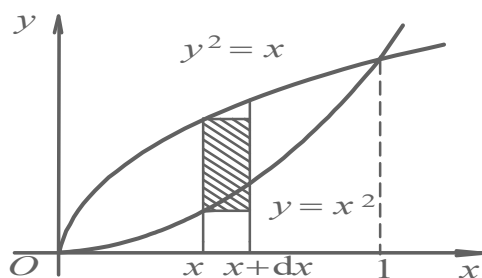
$[a, b]$  取一个区间微元  $[x, x+dx]$ ,

求出面积的近似值  $dA$

(2) 根据  $dA$  写出

$$A = \int_a^b dA$$

【例 41】求由  $y^2 = x$  和  $y = x^2$  所围成的图形的面积.



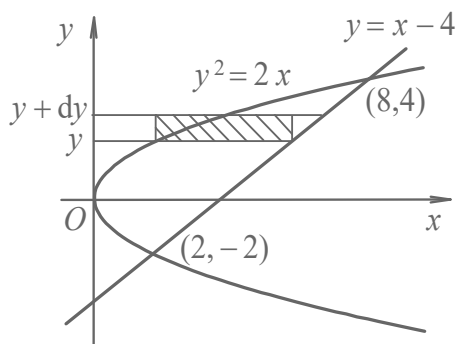
名师解析:

面积微元:  $dA$

所求面积:  $A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$

$$= \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

【例 42】求曲线  $y^2 = 2x$  与  $y = x^2$  所围图形的面积.



名师解析:

解由方程组  $\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases}$  得两条曲线

的交点坐标为 ~~(2, -2)~~, ~~(8, 4)~~,

取  $y$  为积分变量,  $y \in [-2, 4]$ .

将两曲线方程分别改写为

$x = \frac{1}{2}y^2$  及  $y = x - 4$  得所求面积为

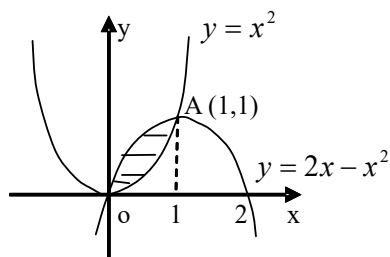
$$\int_{-2}^4 (x - \frac{1}{2}y^2) dy$$

$$= \left[ \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3 \right]_{-2}^4 = 1.$$

【例 43】

求由曲线  $y = x^2$  与  $y = 2x - x^2$

所围图形的面积.



名师解析:

解 由方程组  $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - x^2 \end{cases}$  得两条曲线

的交点为 ~~(0,0)~~, ~~(1,1)~~, 取  $x$  为积分变量,

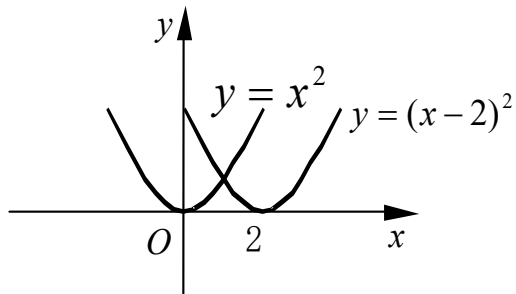
$x \in [0, 1]$  由公式得

$$\int_0^1 (2x - x^2 - x^2) dx$$

$$= \left[ x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

【例 44】

求曲线  ~~$y = x^2$  与  $y = (x-2)^2$~~  与  $x$  轴围成的平面图形的面积.



名师解析:

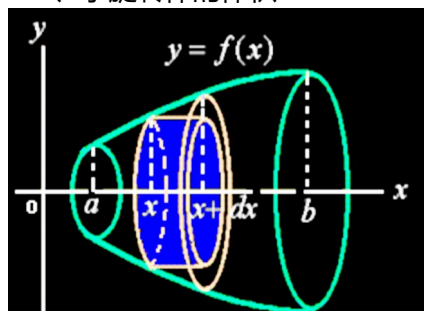
解由  $\begin{cases} y=x^2, \\ y=(x-2)^2, \end{cases}$  得两曲线交点  $(1, 1)$

取  $x$  为积分变量,  ~~$x \in [0, 2]$~~  所求面积

$$A = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (x-2)^2 dx$$

$$= \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 + \left. \frac{(x-2)^3}{3} \right|_1^2 = \frac{2}{3}.$$

二、求旋转体的体积



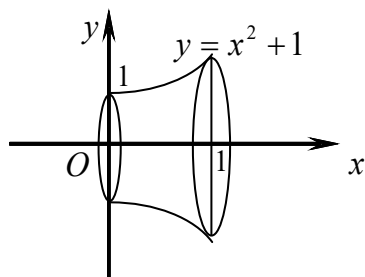
体积元素为  ~~$\pi f^2(x) dx$~~

所求体积为  ~~$\int_a^b \pi f^2(x) dx$~~

【例 45】

求由曲线  $y = x^2 + 1, y = 0, x = 1, x = 0$

所围成的图形绕  $x$  轴旋转一周所得体积



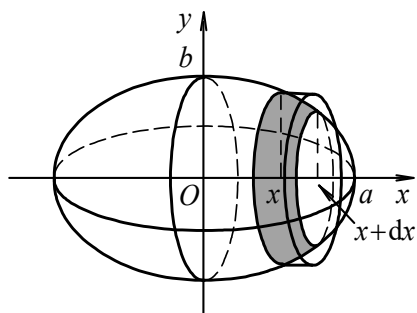
名师解析：

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^1 \pi (x^2 + 1)^2 dx \\
 &= \pi \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1) dx \\
 &= \pi \left( \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{28}{15} \pi .
 \end{aligned}$$

【例 46】

计算由椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  围成的平面图形

绕  $x$  轴旋转而成的旋转椭球体的体积.



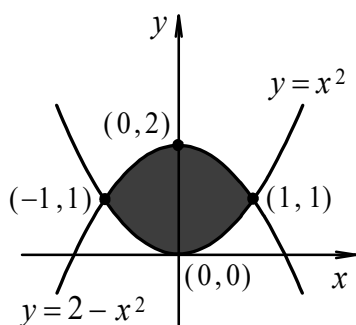
名师解析：

相应于该区间微元的小薄片的体积,  
 近似等于底半径为  $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ , 高为  $dx$   
 的扁圆柱体的体积, 体积微元  $dV = \pi \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx$ ,

故所求旋转椭球体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a dV = \int_{-a}^a \pi \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx \\ &= 2\pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2-x^2)dx \\ &= 2\pi \frac{b^2}{a^2} \left( a^2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{4}{3} \pi ab^2. \end{aligned}$$

【例 47】求由曲线  $y = x^2, y = 2 - x^2$   
 所围成的图形绕  $x$  轴旋转一周所得体积



名师解析:

$$\text{由方程组 } \begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$$

解得交点为  $(-1, 1)$  及  $(1, 1)$ .

$$\begin{aligned} V_x &= 2\pi \int_0^1 [(2-x^2)^2 - x^4] dx \\ &= 8\pi \left( x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{16}{3} \pi. \end{aligned}$$

【例 48】曲线  $x = \sqrt{y}, y = 2, x = 0$  所围成的图形 【09 年真题】

- 1、求所围成的面积
- 2、求此图形绕  $y$  轴旋转一周所得体积

名师解析:

$$1, S = \int_0^2 \sqrt{y} dy = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{4}{3} \sqrt{2}$$

$$2, V = \pi \int_0^2 y dy = \pi \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 = 2\pi$$

【例 49】设 D 是曲线  $y=x^2$  和直线  $y=x$  所围成的有界平面图形, 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

【16 年真题】

名师解析:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 x^2 dx - \pi \int_0^1 x^4 dx \\ &= \frac{1}{3} \pi - \frac{1}{5} \pi = \frac{2}{15} \pi \end{aligned}$$

【例 50】求曲线  $y=x^3$  与直线  $y=x$  所围成的面积

【15 年真题】

名师解析:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x - x^3) dx &= \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 \\ &= 2 \left( \frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4} \right) = 1 \end{aligned}$$