

第二章 一元函数微分学

第一节 导数

一 导数的概念与性质

1、导数的概念

$$\begin{aligned}y' &= f'(x) = \frac{dy}{dx} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\end{aligned}$$

【例1】设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2}$ 求 $f'(0)$

【01年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned}f'(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\&= \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{f(0 + 2x) - f(0)}{2x} \\&= \frac{1}{2} \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(0)}{x} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

【例2】设 $f'(1) = 2$ 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1}$

【17年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned}&\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} \\&= \lim_{(x-1) \rightarrow 0} \frac{f(1+x-1) - f(1)}{x-1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \\&= f'(1) \frac{1}{2} = 1\end{aligned}$$

2、导数的几何意义（重点）

函数在某一点的导数的几何意义等于过该点所对应曲线上一点的切线的斜率

3、可导与连续的关系（了解）

可导一定连续，连续不一定可导

【例3】求 $y = x^3 + 1$ 在点 $(1, 2)$ 的切线的斜率

【08年真题】

名师解析：

$$y' = 3x^2$$

$$\Rightarrow f'(1) = 3$$

二、导数的运算

1、基本公式

$$(1) C' = 0; (2) (x^a)' = ax^{a-1}$$

$$(3) (a^x)' = a^x \ln a; (4) (e^x)' = e^x$$

$$(5) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; (6) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(7) (\sin x)' = \cos x; (8) (\cos x)' = -\sin x$$

$$(9) (\tan x)' = \sec^2 x; (10) (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(11) (\sec x)' = \sec x \tan x; (12) (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(13) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; (14) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(15) (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}; (16) (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

2、基本法则

$$\begin{aligned} (1) (u \pm v)' &= u' \pm v' \\ (2) (uv)' &= u'v + uv' \\ (3) (e^u)' &= e^u u' \\ (4) \left(\frac{v}{u}\right)' &= \frac{v'u - uv'}{u^2} \end{aligned}$$

【例4】设 $f(x) = x \ln x$ 求 $f'(e)$

【17年真题】

名师解析：

$$f'(x) = \ln x + 1$$

$$\Rightarrow f'(e) = 2$$

【例5】设 $f(x) = x^2 - e^2$ 求 $f'(x)$

【09年真题】

名师解析：

$$f'(x) = 2x$$

【例6】设 $f(x) = \frac{e^x}{x}$ 求 $f'(x)$

【09年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x x - e^x}{x^2} \\ &= \frac{e^x(x-1)}{x^2} \end{aligned}$$

【例7】设 $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 求 $f'(x)$

【17年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

3、复合函数求导

$$y = f[g(x)]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = f(u) \\ u = g(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y' &= f'(u)g'(x) \\ &= f'[g(x)]g'(x) \end{aligned}$$

复合函数求导的步骤

- (1) 复合函数的分解
- (2) 代入复合函数求导公式
- (3) 等量代换，消去中间变量

【例8】设 $f(x) = 3^{-x}$ 求 $f'(x)$

【07年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3^{-x} \ln 3 (-x)' \\ &= -3^{-x} \ln 3 \end{aligned}$$

【例9】设 $f(x) = \ln \sin x$ 求 $f'(x)$

【06年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sin x} (\sin x)' \\ &= \frac{\cos x}{\sin x} \end{aligned}$$

【例10】设 $f(x) = 1 + \sin \frac{x}{3}$ 求 $f'(0)$

【09年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3} \cos \frac{x}{3} \\ \Rightarrow f'(0) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

4、隐函数求导

【例11】已知 $x^2 + 3y^4 + x + 2y = 1$ 求 y'

【11年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned} x^2 + 3y^4 + x + 2y &= 1 \\ 2x + 12y^3 y' + 1 + 2y' &= 0 \\ (12y^3 + 2)y' &= -1 - 2x \\ y' &= \frac{-1 - 2x}{12y^3 + 2} \end{aligned}$$

【例 12】 已知 $\cos(x+y)+y=1$ 求 y'

【04 年真题】

名师解析：

$$\cos(x+y)+y=1$$

$$-\sin(x+y)(x+y)' + y' = 0$$

$$-y' \sin(x+y) - \sin(x+y) + y' = 0$$

$$y' = \frac{\sin(x+y)}{1 - \sin(x+y)}$$

5、参数方程求导

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

【例 13】 已知 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = 1 + t^3 \end{cases}$ 求 y'

【17 年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1+t^3)'}{(1+t^2)'} \\ &= \frac{3t^2}{2t} = \frac{3t}{2} \end{aligned}$$

【例 14】 已知 $\begin{cases} x = 1 + 2t^2 \\ y = \sin t \end{cases}$ 求 y'

【08 年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin t)'}{(1+2t^2)'} \\ &= \frac{\cos t}{4t} \end{aligned}$$

6、高阶导数

【例 15】已知 $y = \sin(x-2)$ 求 y''

【16 年真题】

名师解析：

$$y' = \cos(x-2)$$

$$y'' = -\sin(x-2)$$

【例 16】已知 $y = \ln x$ 求 y''

【07 年真题】

名师解析：

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2}$$

【例 17】设函数 $f(x) = 2x + \ln(3x+2)$ ，求 $f''(0)$

【18 年真题】

名师解析：

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{3x+2}(3x+2)' = 2 + \frac{3}{3x+2}$$

$$f''(x) = \frac{-3(3x+2)'}{(3x+2)^2} = \frac{-9}{(3x+2)^2}$$

$$f''(0) = -\frac{9}{4}$$

第二节 微分

一、微分的定义

已知

二、可微与可导的关系（忽略）

三、微分的几何意义（忽略）

四、微分的基本公式（忽略）

五、微分的四则运算（忽略）

六、复合函数的微分（忽略）

【例 18】求 $y = xe^x$ 的微分

名师解析：

$$dy = (xe^x)' dx$$

$$= (e^x + xe^x) dx$$

$$= e^x(1+x) dx$$

【例 19】已知 $y = e^{2x}$ 求 dy

【10 年真题】

A, $e^{2x} dx$ B, $2e^{2x} dx$

C, $\frac{1}{2}e^{2x} dx$ D, $2e^x dx$

名师解答：B

名师解析：

$$y' = 2e^{2x} \Rightarrow dy = 2e^{2x} dx$$

【例 20】已知 $y = 1 + \cos x$ 求 dy

【18 年真题】

A, $(1 + \sin x) dx$; B, $(1 - \sin x) dx$;

C, $\sin x dx$; D, $-\sin x dx$;

名师解答：D

名师解析： $y' = -\sin x \Rightarrow dy = -\sin x dx$

第三节 微分中值定理

这一节的主要内容是为后面的导数的应用如利用导数判断函数的单调性, 求极值点, 利用导数判断函数的凹凸性, 求拐点打下理论基础。只有在 02 年出了一道这节的题。(忽略)

第四节 洛必达法则 (重点)

1 条件 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$

2 法则 $\lim_{\text{条件}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\text{条件}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots\dots$

【例 21】 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x + e^{-x} - 1}{x^2}$ 【14 年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x + e^{-x} - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + xe^x - e^{-x}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x + xe^x + e^{-x}}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

【例 22】 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - e^x}{\sin x}$

【10 年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - e^x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{-x} - e^x}{\cos x} \\ &= -2 \end{aligned}$$

【例 23】 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{\ln(1+x)}$

【03 年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{\ln(1+x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = 2
 \end{aligned}$$

【例 24】 计算 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$

【02 年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 1}{2x} \\
 &= \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

【例 25】 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

【04 年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

【例 26】 计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$

名师解析：

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1
\end{aligned}$$

【例 27】 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{\sin(x^2 - 1)}$

【18 年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{\sin(x^2 - 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x^2 - 4x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x - 4}{2} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

第五节 导数的应用

一、求曲线的切线方程和法线方程

过曲线上一点； $(x_0, f(x_0))$

切线方程； $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

法线方程； $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

【例 28】 已知曲线 $y = x^2 + x - 2$ 的切线的斜率是 3
则切线的方程是 【17 年真题】

名师解答： $y = 3x - 3$

名师解析：

$$y' = 2x + 1 = 3 \Rightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 0$$

$$y = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 3$$

【例 29】已知曲线 $y = e^x + x$ 求该曲线在点 (0,1) 处的法线方程

【15 年真题】

名师解析：

$$y' = e^x + 1 \Rightarrow k = 2$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 0)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

二、函数的单调性和极值

1、函数的单调性

设 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内有定义, 且可导

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow \\ f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow \end{cases}$$

2、函数的极值

(1) 定义; 局部的最值

(2) 必要条件; 极值点一定是一阶导数为 0 的点或导数不存在的点。

(3) 第一充分条件; 根据一阶导数符号判断

(4) 第二充分条件; 根据二阶导数符号判断

3、判断函数单调性和极值的步骤

(1) 求出定义域

(2) 求一阶导数等于 0 的点和导数不存在的点

(3) 用第一充分条件或第二充分条件判断

【例 30】求函数 $y = x - \ln x$ 的单调区间, 并求在点 (1,1) 处的切线方程

【07 年真题】

名师解析：

$$1) x > 0$$

$$2) y' = 1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$3) \begin{cases} 0 < x < 1 \Rightarrow y' < 0 \Rightarrow y \downarrow \\ x > 1 \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow y \uparrow \end{cases}$$

$$y' = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow k = 0$$

$$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$$

【例 31】求函数 $y = \frac{x}{\ln x}$ 的单调增加区间

【05 年真题】

名师解析：

$$1) x > 0 \text{ 且 } x \neq 1$$

$$2) y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \Rightarrow x = e$$

$$3) e < x \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow y \uparrow$$

【例 32】求函数 $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ 的极大值

【10 年真题】

名师解析：

$$1) \mathbb{R}$$

$$2) y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$3) y'' = 6x - 6$$

$$f''(-1) = -12 < 0 \Rightarrow f(-1) = 5$$

【例 33】函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 的极小值是

A, -2; B, 0; C, 2; D, 4

名师解答：A

名师解析:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \\ f''(x) &= 6x \Rightarrow f''(1) = 6 > 0 \\ f(1) &= 1 - 3 = -2 \end{aligned}$$

三、函数的最值

1、函数最值的定义; 整个定义域内的最大值或最小值

2、函数最值的求法;

(1) 求出一阶导数等于0的点和导数不存在的点所对应的值

(2) 求出定义域的端点所对应的值

(3) 比较上述点的大小。

【例 34】用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形的有盖桶, 证明当圆柱的高等于底面直径的时候使用的铁皮面积最小 【17 年真题】

名师解析: 证明; 设高位 h , 底面半径为 r , 表面积 S

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$= 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2}$$

$$= 2\pi r^2 + 2 \frac{V}{r}$$

$$S' = 4\pi r - 2 \frac{V}{r^2} = 0 \Rightarrow h = 2r$$

【例 35】求 $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x$ 在区间 $[0, 4]$ 的最值

名师解析:

$$y' = x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$f(3) = 9; f(0) = 0; f(4) = \frac{28}{3}$$

所以最大值是 $28/3$, 最小值是 0

四、曲线的凹凸性

1、函数的凹凸性

设 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导

$$\begin{cases} f''(x) > 0 \Rightarrow f(x) \cup \\ f''(x) < 0 \Rightarrow f(x) \cap \end{cases}$$

2、曲线的拐点

(1) 定义；凹凸区间的分界点

(2) 求法；利用二阶导数的符号判断

3、判断函数凹凸性和拐点的步骤

利用二阶导数的符号判断

4、渐近线；函数图像无限接近的直线

5、渐近线的求法；

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c \Rightarrow y = c \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Rightarrow x = x_0 \end{cases}$$

【例 36】求 $y = 6x - 24x^2 + x^4$ 的凸区间

名师解析：

1) R

$$2) y' = 6 - 48x + 4x^3$$

$$y'' = -48 + 12x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm 2$$

$$3) (-\infty, -2); (-2, 2), (2, +\infty)$$

$$4) f''(-3) = 60 > 0 \Rightarrow \cup$$

$$f''(0) = -48 < 0 \Rightarrow \cap$$

$$f''(3) = 60 > 0 \Rightarrow \cup$$

【例 37】求函数 $y = x^3 - 3x + 5$ 的拐点

【16 年真题】

名师解析：

1) R

$$2) y' = 3x^2 - 3$$

$$3) y'' = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$4) (-\infty, 0); (0, +\infty)$$

$$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow \cap$$

$$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow \cup$$

$$(0, 5)$$

【例 38】求函数 $y = x^3 - 6x^2 + 3x + 4$ 的拐点

【18 年真题】

名师解析：

$$y' = 3x^2 - 12x + 3$$

$$y'' = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$(-\infty, 2) \Rightarrow y'' < 0$$

$$(2, +\infty) \Rightarrow y'' > 0$$

拐点(2, -6)

【例 39】求曲线 $y = \frac{x+1}{2x+1}$ 的水平渐近线

【17 年真题】

名师解析：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

【例 40】求曲线 $y = \frac{x}{2+x}$ 的垂直渐近线

【17 年真题】

名师解析：

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{2+x} = \infty \Rightarrow x = -2$$

【例 41】 证明; 当 $x > 0$ $(1+x)\ln(1+x) > x$

【10 年真题】

名师解析:

证明:

$$(1+x)\ln(1+x) - x > 0$$

$$f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$$

$$f'(x) = \ln(1+x) + 1 - 1$$

$$= \ln(1+x)$$

$$\text{因为 } x > 0; \ln(1+x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$\Rightarrow f(x) \uparrow$$

$$\text{当 } x = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

$$(1+x)\ln(1+x) > x$$