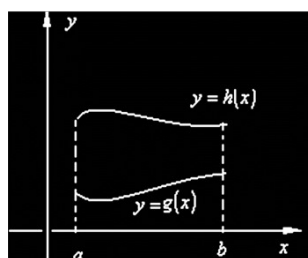


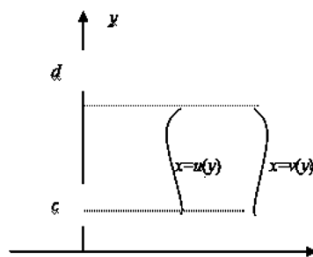
第五章 多元函数微积分学

第一节 多元函数、极限、连续性

一、用不等式组表示平面区域（重点）



$$X; \begin{cases} a < x < b \\ g(x) < y < h(x) \end{cases}$$

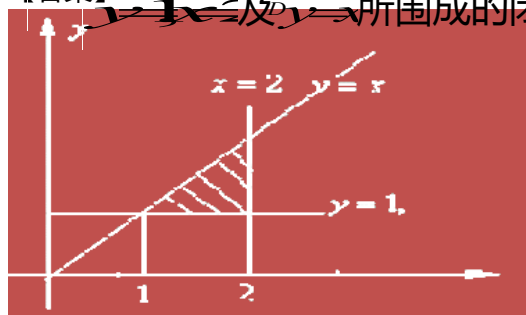


$$Y; \begin{cases} c < y < d \\ u(y) < x < v(y) \end{cases}$$

第一节 多元函数、极限、连续性

【例 1】

计算二重积分 $\iint_D xy \, d\sigma$, 其中 D 是由直线 $x=2$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域.



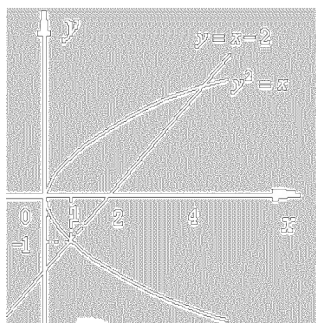
$$X; \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq x \end{cases}$$

$$Y; \begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ y \leq x \leq 2 \end{cases}$$

【例 2】

计算二重积分 $\iint_D xy \, d\sigma$, 其中 D 是由抛物线 $y^2=x$ 及 $y=x$ 所围成的有界闭区域.

【答案】



$$Y; \begin{cases} -1 \leq y \leq 2 \\ y^2 \leq x \leq y + 2 \end{cases}$$

第二节 偏导数与全微分

一、偏导数

1、定义（求法）

从偏导数的定义可以看出，求多元函数对一个自变量的偏导数时，实际上只需将其它自变量看成常数，按照一元函数的求导法则进行即可。

2、偏导数的几何意义（忽略）

【例3】设二元函数 $z = x^2y + x \sin y$ ，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$

【14年真题】

A. $2xy + \sin y$

B. $x^2 + x \cos y$

C. $2xy + x \sin y$

D. $x^2y + \sin y$

【答案】A

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + \sin y$

【例4】，设二元函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 求 $(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2$

【14年真题】

A. 1

B. 2

C. $x^2 + y^2$

D. $\frac{1}{x^2 + y^2}$

【答案】A

【解析】 $(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 = (\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}})^2 + (\frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}})^2$
 $= 1$

【例5】设二元函数 $z = x^2y^2$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 【18年真题】

真题】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2$$

【答案】 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy$

【例6】设二元函数 $z = x^2y + 3x + 2y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ 【18年真题】

A. $2xy + 3 + 2y$

B. $xy + 3 + 2y$

C. $2xy + 3$

D. $xy + 3$

【答案】 C

【解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 3$$

【例7】设二元函数 $z = \ln(x^2 + y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ 【17年真题】

【答案】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y}$$

【例8】设二元函数 $z = x^2y^2 + x - y + 1$ 求 $\frac{\partial z}{\partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

【17年真题】

【答案】

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y - 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy$$

二、全微分

1、定义

函数 ~~$z = f(x, y)$~~ 的全微分

$$d\underset{\alpha}{z} = \underset{\alpha}{\frac{\partial z}{\partial x}} dx + \underset{\alpha}{\frac{\partial z}{\partial y}} dy$$

2、性质（忽略）

【例 9】设二元函数 $z = x^2 + 2xy$ ，则 dz 【14 年真题】

【答案】

$$dz = (2x + 2y)dx + 2xdy$$

【例 10】设二元函数 $z = xy$ ，则 dz 【15 年真题】

【答案】

$$dz = ydx + xdy$$

【例 11】求函数 $z = e^{xy}$ 在点 (2,1) 处的全微分

【答案】

$$\underset{\alpha}{\frac{\partial z}{\partial x}} = y e^{xy}, \underset{\alpha}{\frac{\partial z}{\partial y}} = x e^{xy},$$

$$\underset{\alpha}{\frac{\partial z}{\partial x}} \Big|_{(2,1)} = e^2, \underset{\alpha}{\frac{\partial z}{\partial y}} \Big|_{(2,1)} = 2e^2$$

$$dz = e^2 dx + 2e^2 dy$$

三、二阶偏导数

【例 12】

设 ~~$z = f(x, y)$~~ ，求

$$\frac{\underset{\alpha}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} \underset{\alpha}{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}} \underset{\alpha}{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}} \underset{\alpha}{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}}{\underset{\alpha}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} \underset{\alpha}{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}} \underset{\alpha}{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}} \underset{\alpha}{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}}$$

【答案】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 12xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 24y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x$$

【例 13】 设 $z = x^2 y + \sin y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x \partial y}$

【05 年真题】

【答案】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x \partial y} = 2x$$

四、复合函数微分法（忽略）

设 $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

【例 14】 设 $z = (2x + y)^{2x+y}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}$

【答案】

设; $u = 2x + y; v = 2x + y \Rightarrow z = u^v$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= v u^{v-1} 2 + u^v \ln u 2$$

$$= 2(2x + y)^{2x+y} [\ln(2x + y) + 1]$$

五、隐函数的微分法

1、一元隐函数

前面已经讨论了

2、二元隐函数

设方程 ~~$F(x, y, z) = 0$~~ 确定函数 ~~$z = f(x, y)$~~

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

【例 15】设 $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$

【答案】

令 ~~$F(x, y, z) = 0$~~ 则

$$F_x = 2x, F_z = 2z - 4$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{x}{2-z},$$

第三节 二元函数的极值

一、求 ~~$f(x, y)$~~ 的极值的步骤

第一步 解方程组 ~~$F_x = F_y = F_{zz} = 0$~~

求出 ~~$f(x, y)$~~ 的所有驻点;

第二步 求出函数 ~~$f(x, y)$~~ 的二阶偏导数,

依次确定各驻点处 A 、 B 、 C 的值, 并

根据 ~~$A \cdot B$~~ 的符号判定驻点是否为极值点.

最后求出函数 ~~$f(x, y)$~~ 在极值点处的极值.

(1) 当 ~~$A < B$~~ 时, $f(x)$ 在 (x_0, y_0) 处有极值,

~~$A < B$~~ 时有极小值 $f(x_0, y_0)$;

~~$A < B$~~ 时有极大值 $f(x_0, y_0)$;

(2) 当 ~~$A < B$~~ 时, $f(x)$ 在 (x_0, y_0) 处没有极值;

(3) 当 ~~$A < B$~~ 时, 无法判断.

【例 16】设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 求极值

【答案】

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ f'_y(x, y) = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases}$$

先解方程组解得驻点为

$$(1, 0), (1, 2), (-3, 0), (-3, 2)$$

再求出二阶偏导数

$$f''_{xx}(x, y) = 6x$$

$$f''_{xy}(x, y) = 0,$$

$$f''_{yy}(x, y) = -6y$$

在点 $(1, 0)$ 处, ~~$A < B < 0$~~ $A < 0$,

故函数在该点处有极小值 ~~10~~ 10 ;

在点 $(1, 2)$, $(-3, 0)$, ~~$A < B < 0$~~ $A < 0$,

故函数在这两点处没有极值;

在点 $(-3, 2)$, ~~$A < B < 0$~~ 又 $A < 0$,

故函数在该点处有极大值 ~~-33~~ -33 .

【例 17】设 $z = x^2 + xy + y^2 + x - y - 5$, 求极值 【15 年真题】

【答案】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y + 1 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, y = 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$

$$A = 2, B = 1, C = 2$$

$$B^2 - AC = -3 < 0, A > 0 \Rightarrow \text{极小值} -6$$

二、二元函数的条件极值（忽略）

前面所讨论的极值问题，对于函数的自变量无其它限制条件，这类极值称为无条件极值。但在实际问题中，常会遇到对函数的自变量还有附加条件的极值问题。称为条件极值。

拉格朗日乘数法

求函数 $f(x, y)$ 在条件 $\phi(x, y) = 0$ 的

极值的拉格朗日乘数法的基本步骤为：

(1) 构造拉格朗日函数

λ 为常数；

(2) 由方程组

$$\begin{cases} L_x = f_x(x, y) + \lambda \phi_x(x, y) = 0 \\ L_y = f_y(x, y) + \lambda \phi_y(x, y) = 0 \\ L_\lambda = \phi(x, y) = 0 \end{cases} \text{解出 } x, y, \lambda$$

第四节 二重积分的概念和性质

一、二重积分的概念

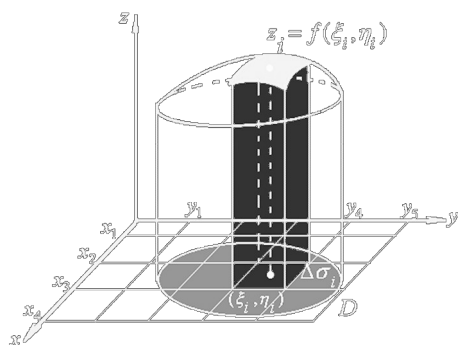
1、定义

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta \sigma_i$$

其中 $f(x, y)$ 称为被积函数， $d\sigma$ 称为面积微元，

x 和 y 称为积分变量， D 称为积分区域，

- 2、几何意义；求曲顶柱体的体积
- 3、物理意义；（忽略）
- 4、存在定理；（忽略）



二、二重积分的性质

性质 1

$$\iint_D [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma$$

性质 2

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$$

第五节 在直角坐标系下二重积分计算

一、二重积分在直角坐标系下的计算

假定积分区域 D 为如下 X -型区域:



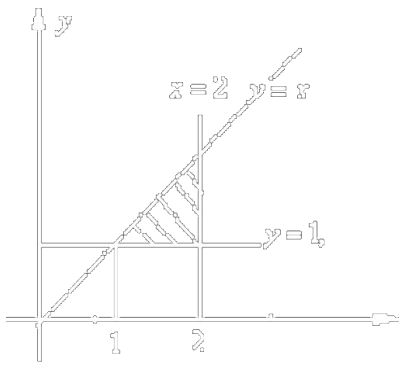
类似地, 如果积分区域 D 为 Y -型区域:



【例 18】

计算二重积分 $\iint_D xy d\sigma$, 其中 D 是由直线

$y=x$ 及 $y=3-x$ 所围成的闭区域.



【答案】将它看作一个X型区域

即 ~~即~~.

~~$$\iint_D xy \, dx \, dy$$~~

$$= \int_1^2 x \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=1}^{y=x} dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{2} x \right) dx = \frac{9}{8}$$

也可以将 D 看成是 y - 型区域,

~~即~~,

~~$$\iint_D xy \, dx \, dy$$~~

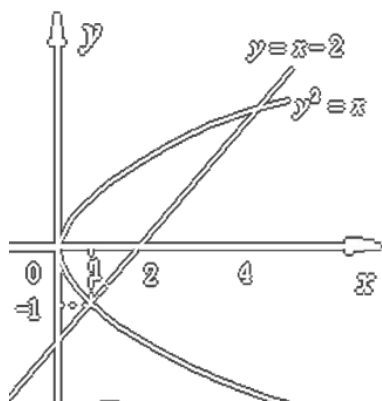
$$= \int_1^2 y \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=y}^{x=2} dy$$

$$= \int_1^2 \left(2y - \frac{1}{2} y^3 \right) dy = \frac{9}{8}.$$

【例 19】

计算二重积分 $\iint_D xy \, dx \, dy$, 其中 D 是

有抛物线 $y^2 = x$ 及 $y = x - 2$ 所围成



【答案】

区域 D 可以看成是 Y -型区域, 它表示为

$$D = \{(x, y) \mid -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4\}$$

【例 20】计算 $\iint_D x^2 y dx dy$, D 是由 $y = x^2; x = 1; y = 0$ 所围成

【10 年真题】

【答案】

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y dx &= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} x^2 y dy \\ &= \int_0^1 x^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^6 dx \\ &= \frac{1}{14} \end{aligned}$$

【例 21】计算 $\iint_D xy dx dy$, D 是由 $y = x; x = 0; y = 1$ 所围成 【06 年真题】

【答案】

$$\begin{aligned}
 \iint_D xy \, dx &= \int_0^1 dx \int_x^1 xy \, dy \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_x^1 dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2} \right) dx \\
 &= \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

【例 22】计算 $\iint_D (1+x^2) \, dx dy$, D 是由 $y = \sqrt{x}; x = 1; y = 0$ 所围成

【07 年真题】

【答案】

$$\begin{aligned}
 \iint_D (1+x^2) \, dx &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} (1+x^2) \, dy \\
 &= \int_0^1 (1+x^2) \sqrt{x} \, dx \\
 &= \frac{20}{21}
 \end{aligned}$$

【例 23】计算 $\iint_D (x^3 + y) \, dx dy$, D 是由 $y = x^2; y = 1$

所围成 【16 年真题】

【答案】

$$\begin{aligned}
& \iint_D (x^3 + y) dx dy \\
&= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x^3 + y) dy \\
&= \int_{-1}^1 dx \left(x^3 y + \frac{1}{2} y^2 \right)_{x^2}^1 \\
&= \int_{-1}^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} - x^5 - \frac{1}{2} x^4 \right) dx \\
&= \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

【例 24】计算 $\iint_D xy^2 dx dy$ 其中积分区域 D 由直线 $y=x$, $x=1$ 及 x 轴围成 【13 年真题】

【答案】

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\iint_D xy^2 dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^x xy^2 dy \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{15} x^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{15}
\end{aligned}$$

【例 25】计算 $\iint_D (x+1) dx dy$ 其中积分区域 D 由直线 $y=0$, $x=0$ 及 $x+y=1$ 围成 【14 年真题】

【答案】

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_D (x+1) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+1) dy \\
 &= \int_0^1 dx \left[(x+1)y \right]_0^{1-x} \\
 &= \int_0^1 (x+1)(1-x) dx \\
 &= \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right)_0^1 = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

【例 26】已知积分区域 $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$

则

$$\iint_D x dx dy$$

【18 年真题】

A.0
C.2

B.1
D.4

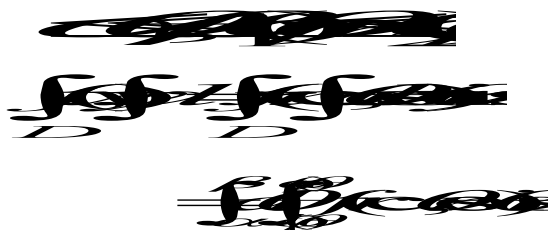
【答案】A

【解析】

$$\begin{aligned}
 \iint_D x dx dy &= \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 x dy = \int_{-1}^1 dx \left[xy \right]_{-1}^1 = \int_{-1}^1 2x dx \\
 &= x^2 \Big|_{-1}^1 = 0
 \end{aligned}$$

第六节 极坐标系下二重积分的计算

一、在极坐标系下二重积分公式为



适用的对象：(1) 被积函数一般含有 $x^2 + y^2$

(2) 积分区域为圆域，扇形域，环型域

【例 27】计算 $\iint_D y dx dy$ D 是由 $x^2 + y^2 = 1; y = x; y = 0$ 在第一象限所围成

【11 年真题】

【答案】

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iint_D y dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 r^2 \sin \theta dr \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{3} \left[-\cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

【例 28】计算 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ D 是由 $x^2 + y^2 = 1; x = 0; y = 0$ 在第一象限所围成

【08 年真题】

【答案】

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^3 dr \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

【例 29】计算 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ D 是由 $x^2 + y^2 \leq 2y; x \geq 0$ 所围成 【05 年真题】

【答案】

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 2\sin\theta \end{cases}$$

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r dr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^{2\sin\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\theta d\theta$$

$$= \frac{16}{9}$$

【例 30】计算 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy$ 积分区域 D 由 $x^2+y^2 \leq 4$ 围成 【17 年真题】

【答案】

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 2 \end{cases}$$

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 r dr$$

$$= \frac{16\pi}{3}$$

【例 31】计算 $\iint_D (x^2+y^2) dx dy$ 积分区域 D 由 $x^2+y^2 \leq 9; y \geq 0$ 围成 【18 年真题】

【答案】

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^3 r^3 dr \\ &= \frac{81}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \frac{81\pi}{4} \end{aligned}$$

第七节 二重积分的应用

一、几何应用；求曲顶柱体的体积

二、物理应用；（忽略）

【例 32】设平面 $x=1, x=-1, y=1, y=-1$ 围成的柱体被坐标平面 $z=0$ 和平面 $x+y+z=3$ 所截，求截下部分的体积。

【答案】

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (3-x-y) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 (3-x-y) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left[(3-x)y - \frac{1}{2}y^2 \right]_{-1}^1 dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 (3-x) dx = \left(6x - x^2 \right)_{-1}^1 = 12 \end{aligned}$$