

第六章 无穷级数

第一节 无穷级数的概念和性质

一、无穷级数

1 设给定一个无穷数列 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$,

则
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

称为数项级数, 简称级数. 其中第 n 项 u_n

称为级数的通项或一般项. 该级数的前 n 项和

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

二、基本性质

① 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛

② 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 有相同的敛散性,

③ 添加、去掉或改变级数的有限项, 所得级数的敛散性不变.

④ (级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

三、几个重要极限

1 等比级数 (几何) $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, 当 $|q| < 1$ 收敛,
 $|q| \geq 1$ 发散;

2 P 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $p > 1$ 收敛, $p \leq 1$ 发散;

当 $p=1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 又称调和级数。

【例 1】判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1}$ 敛散性

名师解答: 发散

名师解析:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

【例2】判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$ 敛散性

名师解答：发散

名师解析： $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的

【例3】判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right)$ 敛散性

名师解答：收敛

名师解析：性质1

【例4】求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ 【10年, 18年真题】

名师解答： $\frac{3}{2}$

名师解析：

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} \right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

第二节 正项级数

若 ~~$u_n \in \mathbb{R}$~~ , 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数

一、比较判别法

大收敛 $\Rightarrow$ 小收敛

$\Rightarrow$

小发散 大发散

二、比值判别法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则

当 $\rho < 1$ 时, 级数收敛;

当 $\rho > 1$ 时, 级数发散;

当 $\rho = 1$ 时, 级数可能收敛, 也可能发散

三、极限形式的比较判别法 (忽略)

【例 5】判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{5^n}$ 的收敛性 【14 年真题】

名师解析:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+6}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{5n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+6}{5(5n+1)} \\ &= \frac{1}{5} < 1 \end{aligned}$$

所以原级数收敛

【例 6】判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ 的收敛性

名师解析:

$$0 < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 是收敛的

所以原级数收敛

【例 7】判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$ 的收敛性

名师解析：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

所以原级数收敛

【例8】判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 2^n}$ 的收敛性

名师解析：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2 2^{n+1}} \div \frac{3^n}{n^2 2^n} = \frac{3}{2} > 1$$

$$\frac{3}{2} > 1,$$

所以原级数发散

【例9】设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数 $u_n \leq v_n$

下列正确的是

【01,09年真题】

- A、若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 B、若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛
- C、若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 D、若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

名师解答： D

名师解析： 比较判别法

第三节 任意项级数

一、任意项级数（忽略）

二、交错级数；形如

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \dots$$

其中 $u_n > 0$, 则称之为交错级数.

定理 1 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$

(1) $u_n \leq u_{n-1}$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则收敛

【例10】判断 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 的敛散性

名师解析:

由于 $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. 故收敛.

三、绝对收敛与条件收敛

定理 2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛;

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

定理 3 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定收敛.

【例 11】

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+a^2}$$

已知 a 为常数, 则级数

下列正确的是

【17 年真题】

A、发散

B、条件收敛

C、绝对收敛

D、收敛性与 a 的取值有关

名师解答： B

名师解析： 条件收敛的定义和交错级数的判别法

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

【例 12】 判别级数 是

- A、绝对收敛
- B、条件收敛
- D、不能确定
- C、发散

名师解答： A

名师解析： 绝对收敛的定义

【例 13】

判别下列级数是否收敛，若收敛，是否为绝对收敛

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$$

$$(3) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

名师解析：

$$(1) \text{ 为交错级数, } u_n = \frac{1}{n}, u_{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

$$\text{故 } u_n \geq u_{n+1} \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

由莱布尼兹判别法知原级数收敛.

$$\text{但由于 } \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 发散,}$$

故原级数为条件收敛.

(2) 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 为收敛级数, 故原级数收敛,
 并且为绝对收敛.

(3) $u_n = \frac{1}{2n-1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 且 $u_n > u_{n+1}$

知原级数收敛.

又因为 $\left| (-1)^n \frac{1}{2n+2} \right| = \frac{1}{2n+2}$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 由比较原则知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 发散

故原级数为条件收敛.

第四节 幂级数

一、幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

1、收敛半径和收敛区间

(1) 收敛半径; 幂级数收敛的范围 (一定是关于一点对称)

(2) 收敛区间; 收敛范围

2、求收敛域

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \begin{cases} R|x| < 1 \Rightarrow -\frac{1}{R} < x < \frac{1}{R} \\ 0 < |x| < 1 \Rightarrow -\infty < x < +\infty \\ \infty |x| < 1 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

【例 14】幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的收敛半径是

下列正确的是

【10, 16 年真题】

A、0

B、1

C、2

D、无穷大

名师解答: B

名师解析: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{n}{x^n} \right| = |x| \Rightarrow R = 1$

【例 15】求收敛域

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$$

名师解析:

$$(1) \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1, \text{ 所以收敛半径 } R=1$$

当 $x=1$ 时, 级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, 该级数收敛;

当 $x=-1$ 时, 级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 该级数发散.

从而所求收敛域为 $(-1, 1]$

$$(2) \text{ 因为 } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0, \text{ 所以收敛半径 } \rho = +\infty;$$

所求收敛域为 $(-\infty, +\infty)$

【例 16】求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2^n}$ 的收敛域

名师解析:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{x^n} = \frac{1}{2} |x|^2.$$

当 $\frac{1}{2}|x|^2 < 1$ 即 $|x| < \sqrt{2}$ 时, 级数收敛;

当 $\frac{1}{2}|x|^2 > 1$ 即 $|x| > \sqrt{2}$ 时, 级数发散,

所以收敛半径 $R = \sqrt{2}$

当 $x = \pm\sqrt{2}$ 时, 级数发散; 故所求收敛域为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

【例 17】求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$ 收敛半径

【02 年真题】

名师解析:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{(x-2)^n}{n^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x-2| \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

如果改为求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$ 收敛域

名师解析:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{(x-2)^n}{n^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x-2| \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$= |x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

第五节 将初等函数展开成幂级数

一、将初等函数展开为幂级数

利用麦克劳林级数展开初等函数（忽略）

二、幂级数的基本性质

性质 1 忽略

性质 2 对幂级数可以逐项求导

性质 3 对幂级数可以逐项积分

性质 4 忽略

三、几个常用的标准展开式

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

$$\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

四、间接展开法

间接展开法：就是利用几个常用函数的幂级数展开式

以及幂级数的四则运算、分析运算，函数的复合，

变量代换等，将所给函数展开成幂函数。

【例 18】将函数 $f(x) = \frac{1}{2-x}$ 展开成幂级数

名师解析：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-x} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{2}\right)^n + \cdots \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n \end{aligned}$$

【例 19】展开函数 $f(x) = \ln(3+x)$

名师解析：

$$\begin{aligned} \ln(3+x) &= \ln 3 \left(1 + \frac{x}{3} \right) = \ln 3 + \ln \left(1 + \frac{x}{3} \right) \\ \ln(1+x) &= (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ \therefore \ln(3+x) &= \ln 3 + (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^{n+1}}{n+1} = \ln 3 + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} \end{aligned}$$

【例 20】将 $\frac{1}{x}$ 展开为 $(x-2)$ 的幂级数

名师解析：

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{2+(x-2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\left[-\frac{x-2}{2}\right]} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

【例 21】将函数 $y = \frac{1}{1-5x}$ 展开为 x 的幂级数

【11 年真题】

名师解析：

解：因为 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

$$\frac{1}{1-5x} = 1 + 5x + 25x^2 + 125x^3 + \dots$$

【例 22】将函数 $y = xe^{3x}$ 展开为 x 的幂级数，并求收敛域

【08 年真题】

名师解析：

解：因为 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$xe^{3x} = x \left(1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \dots \right)$$

$$= x + 3x^2 + \frac{9x^3}{2} + \frac{9x^4}{2} + \dots$$

【例 23】将函数 $f(x) = e^{x^2}$ 展开为幂级数

名师解析：

$$\because e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\therefore e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$\frac{1}{3-x}$$

【例 24】将函数 $\frac{1}{3-x}$ 展开为 $(x+1)$ 的幂级数，并求收敛区间

【03 年真题】

名师解析：

$$\frac{1}{3-x} = \frac{1}{4-(x+1)} = \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{(x+1)}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{4} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{4^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(x+1)^{n+1}}{4^{n+2}}}{\frac{(x+1)^n}{4^{n+1}}} \right| = \frac{1}{4} |x+1| < 1$$

$$\Rightarrow (x+1) < 4 \Rightarrow -5 < x < 3$$

$$|x+1| < 4 \Rightarrow -5 < x < 3$$