

第四章 空间解析几何

第一节 平面与直线

1、平面

1、平面方程

(1) 平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

(2) 平面的一般式方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

2、特殊的平面方程

过原点的平面方程

$$Ax+By+Cz=0$$

平行于 z 轴的平面方程

$$Ax+By+D=0$$

过 z 轴的平面方程

$$Ax+By=0$$

平行于 xoy 面的平面方程

$$Cz+D=0$$

3、两个平面的位置关系

(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2$ 的充要条件是

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

(2) $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ 的充要条件是

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

4、建立平面方程

(1) 已知一点和垂直于该平面的另一平面

(2) 已知一点和垂直于该平面的向量

(3) 已知三点的坐标

【例 1】过坐标原点且垂直于向量 (1,1,1) 的平面方程是【14 年真题】

【答案】 $x+y+z=0$

【解析】代入平面的点法式方程

【例 2】过坐标原点且与平面 $2x-y+z+1=0$ 平行的平面方程是【13 年真题】

【答案】 $2x-y+z=0$

【解析】代入平面的点法式方程

【例 3】

过点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ 的平面方程

A. $x+y+z=1$ B. $2x+y+z=1$

C. $x+2y+z=1$ D. $x+y+2z=1$

【10年真题】

【答案】A

【解析】代入一般式方程

【例4】

求通过 x 轴和点 $(4,3,1)$ 的平面方程.

【答案】

$$By + Cz = 0$$

$$-3B - C = 0 \Rightarrow C = -3B$$

$$By - 3Bz = 0 \Rightarrow y - 3z = 0$$

【例5】已知平面在三个坐标轴上的截距分别是 $A=3$, $b=-4$, $c=5$ 求此平面方程

【答案】

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$$

【解析】代入一般式方程

【例6】判断下列平面的位置关系

(1) $\begin{cases} l_1: 3x - 2y + z = 0 \\ l_2: 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} l_1: 2x - y + 3z = 0 \\ l_2: x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

(2) $\begin{cases} l_1: 2x - y + 3z = 0 \\ l_2: x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} l_1: 2x - y + 3z = 0 \\ l_2: x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

【答案】

(1) 两平面相交,

(2) ~~$\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2}$~~

且 $\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2}$ 故两平面平行但不重合.

一、直线

1、直线方程

(1) 直线的标准式方程

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

(2) 直线的一般式方程 (忽略)

2、空间直线的关系

(1) $L_1 \perp L_2$ 的充要条件是

~~$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$~~

(2) $L_1 // L_2$ 的充要条件是

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

3、直线与平面的关系

(1) $L \perp \Pi$ 的充要条件是

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p};$$

(2) $L // \Pi$ 的充要条件是

~~$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$~~

4、建立直线方程

(1) 已知一点和垂直于某平面的直线

(2) 已知两点

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$$

【例 7】直线 $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ 的方向向量【17 年真题】

A. (3, -1, 2)

B. (1, -2, 3)

C. (1, 1, -1)

D. (1, -1, -1)

【答案】A

【解析】代入直线的点向式方程

【例8】过点 (1, -1, -2) 且与平面 $2x-2y+3z=0$ 垂直的直线方程是【11年真题】

【答案】

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{3}$$

【解析】代入直线的点向式方程

【例9】

过点(1,-1,0)且与直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$

垂直的平面方程是

【07年真题】

【答案】 $x-2y+3z-3=0$

【解析】代入平面的点法式方程

【例10】

$x+2y-z+3=0$ 和 $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$ 的位置关系

- A.垂直
- B.互相平行但直线不在平面上
- C.既不平行也不垂直
- D.直线在平面上

【答案】D

【解析】 $1*3+2*(-1) + (-1)*1=0$, 点 (1, -1,2) 在平面上。

第二节 简单的二次曲面

一、曲面方程

球面 

椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$

椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$

椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

抛物柱面 $x^2 = 2py$

【例 11】判断下列方程表示什么曲面

(1) $x^2 + y^2 = 1$

(2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(3) $x^2 = 2py$

【答案】(1) 圆柱面；(2) 双曲柱面；(3) 抛物柱面。

【例 12】方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 表示的曲线是

【08 年真题】

- A. 球面
- B. 柱面
- C. 锥面
- D. 椭球面

【答案】D

【解析】利用消除法

【例 13】方程 $x + y - z = 0$ 表示的曲线是

【05 年真题】

- A. 旋转抛物面
- B. 平面
- C. 锥面
- D. 椭球面

【答案】B

【解析】根据平面的一般方程

【例 14】设球面方程是 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$ 则该球的球心坐标与半径分别是

【14 年真题】

- A. $(-1, 2, -3)$; 2
- B. $(-1, 2, -3)$; 4

C. (1, -2,3) ; 2

D. (1, -2,3) ; 4

【答案】C

【解析】根据球面的标准方程

【例 15】方程 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ 表示的曲面是 【17 年真题】

A.圆锥面

B.旋转抛物面

C.球面

D.椭球面

【答案】D

【解析】利用消除法

【例 16】方程 $x^2 + y^2 - 2z = 0$ 表示的曲面是 【18 年真题】

A.柱面

B.旋转抛物面

C.球面

D.椭球面

【答案】B

【解析】利用消除法